

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM FINANÇAS

COBERTURA DO RISCO DE LONGEVIDADE PARA A
POPULAÇÃO PORTUGUESA NO MERCADO
OBRIGACIONISTA

RÚBEN FILIPE CLARINHA PEREIRA CARLOS

ORIENTAÇÃO: PROFESSOR DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

JÚRI:

PRESIDENTE: PROFESSORA DOUTORA CLARA COSTA RAPOSO

VOGAIS: PROFESSOR DOUTOR ALFREDO DUARTE EGÍDIO DOS REIS
PROFESSOR DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

OUTUBRO DE 2011

COBERTURA DO RISCO DE LONGEVIDADE PARA A POPULAÇÃO PORTUGUESA NO MERCADO OBRIGACIONISTA

Rúben Filipe Clarinha Pereira Carlos

Mestrado em Finanças

Orientador: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Provas concluídas em: Outubro de 2011

RESUMO

Os aumentos na longevidade humana têm-se evidenciado nas últimas décadas e constituem uma das questões chave para a indústria das pensões. Para a cobertura do risco de longevidade, vários produtos têm sido criados nos mercados financeiros, procurando lidar com a situação. Para que a emissão de tais produtos seja uma realidade, muitos modelos estocásticos têm sido desenvolvidos com o objectivo de prever as taxas de mortalidade futuras.

Neste trabalho, discutem-se os referidos produtos e simula-se a criação de duas obrigações de sobrevivência, indexadas a um índice de sobrevivência, construído com base nos dados da mortalidade da população portuguesa. A estimação das taxas de mortalidade é feita utilizando um modelo estocástico de dois factores, o modelo de Cairns-Blake-Dowd. Com o índice construído, procura dar-se um contributo para a resolução do problema de cobertura do risco de longevidade que as entidades gestoras enfrentam em Portugal.

Palavras-chave: Longevidade, Obrigações de sobrevivência, Mortalidade, Modelos estocásticos de mortalidade

LONGEVITY RISK HEDGING FOR THE PORTUGUESE POPULATION IN THE BOND MARKET

Rúben Filipe Clarinha Pereira Carlos

Master in Finance

Advisor: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Approved in: October 2011

ABSTRACT

Increases in life expectancy have been noticeable in recent decades and this is considered to be one of the key issues for the pensions industry. To address the longevity risk hedging, several instruments have been discussed within the financial markets, in order to find a solution. So that these financial instruments can be issued, many stochastic models have been produced, to match the evolution of the mortality curve as close as possible.

In this paper, we discuss and simulate the issue of two longevity bonds with cash flows linked to the evolution of a survival index, built over the Portuguese mortality data. The estimation of mortality rates is performed using a two-factor stochastic model, the Cairns-Blake-Dowd model. The main objective is to develop a hedging solution to the increases in human longevity in Portugal.

Keywords: Longevity, Survivor bonds, Mortality, Stochastic mortality models

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Onofre Alves Simões, meu orientador, pela sua disponibilidade, contributo e exigência, que me ajudaram a ultrapassar os obstáculos mais difíceis na redacção deste trabalho. Certamente sem a sua orientação científica teria sido mais difícil chegar ao seu termo.

Ao Professor João Nicolau, a Matias Leppisaari, M.Sc. e a Artur Granja pelos esclarecimentos dados e que me ajudaram na prossecução dos meus objectivos.

A todos os meus colegas e amigos, que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste projecto.

Por fim, à minha família, em especial à Filipa, pelo incentivo, ajuda e tolerância, que me permitiram chegar até aqui.

ÍNDICE

Resumo	2
Abstract	3
Agradecimentos.....	4
Índice	5
Índice de Figuras.....	8
Índice de Tabelas	11
1. Introdução	12
2. O Risco de Longevidade	15
2.1 Evolução das taxas de mortalidade.....	15
2.2 Risco de Longevidade e risco de mortalidade	17
2.3 Análise da sustentabilidade dos sistemas de segurança social	18
3. Pensões, Anuidades e Risco de Longevidade	21
3.1 Análise das fontes de desvios nas previsões de longevidade	21
3.2 Alguns conceitos actuariais	23
3.2.1 Função de sobrevivência	23
3.2.2 Taxas de mortalidade e sobrevivência.....	24
3.2.3 Força de mortalidade	25
3.3 Anuidades.....	26
3.4 Estimação de Parâmetros	27
4. Cobertura do Risco de Longevidade	28
4.1 Produtos e estratégias de cobertura clássicas	29
4.2 Obrigações de Sobrevivência / Longevidade	30
4.3 Obrigações de Longevidade com o nocional em risco	33
4.4 Obrigações de Longevidade com cupão zero.....	33
4.5 Obrigações de Longevidade inversas.....	34
4.6 Obrigações de Longevidade colateralizadas (CLO)	35
4.7 Obrigações de catástrofe de Longevidade.....	35
4.8 Swaps de sobrevivência	36
4.9 Q-Forwards.....	39
4.10 Futuros de mortalidade.....	40

4.11	Primeiras emissões de produtos nos mercados financeiros e os principais constrangimentos.....	42
5.	Modelos de previsão de mortalidade.....	45
5.1	Modelos Determinísticos	47
5.1.1	Método de extrapolação.....	47
5.1.2	Método de tendência	47
5.2	Modelos estocásticos de mortalidade.....	47
5.2.1	Modelo Lee-Carter	48
5.2.1.1	O Modelo	48
5.2.1.2	Análise do modelo	50
5.2.2	Modelo de Cairns-Blake-Dowd	51
5.2.2.1	O Modelo	52
5.2.2.1	Análise do modelo	52
5.2.3	Modelos de tempo contínuo.....	53
6.	Incerteza no contexto da modelação da mortalidade	55
6.1.1	Critérios para selecção de um modelo de mortalidade.....	56
7.	Aplicação prática	58
7.1	O problema	59
7.2	Dados utilizados na aplicação	60
7.2.1	Base de dados de mortalidade.....	61
7.2.2	Actualização de cash-flows – <i>Yield curve data</i>	63
7.3	Estimação de parâmetros do modelo de Cairns-Blake-Dowd.....	66
7.3.1	Estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados.....	67
7.3.2	Estimação dos parâmetros pela função de máxima verosimilhança	73
7.3.3	Comparação dos resultados de estimação	81
7.4	Simulação	83
7.4.1	Taxas de mortalidade.....	84
7.4.2	Índice de sobrevivência	85
7.4.3	Valor actual da obrigação de longevidade.....	90
8.	Ideias finais	96
	Bibliografia.....	99
	Anexos	107

Anexo 1 – Alguns dos valores estimados para os parâmetros $A1(t)$ e $A2(t)$ (Método dos Mínimos Quadrados).....	107
Anexo 2 – Algumas das taxas de mortalidade ajustadas para idades dos 60 aos 95 anos (Método dos Mínimos Quadrados)	108
Anexo 3 – Outputs eViews para obtenção dos valores de μ e V (Método dos Mínimos Quadrados).....	109
Anexo 4 – Códigos Matlab utilizados na maximização dos parâmetros $A1(t)$ e $A2(t)$ (Função de Máxima Verosimilhança)	111
Anexo 5 – Alguns dos valores estimados para os parâmetros $A1(t)$ e $A2(t)$ (Função de Máxima Verosimilhança).....	113
Anexo 6 – Algumas das taxas de mortalidade ajustadas para idades dos 60 aos 95 anos (Função de Máxima Verosimilhança)	114
Anexo 7 – Outputs eViews para obtenção dos valores de μ e V (Função de Máxima Verosimilhança)	115
Anexo 8 – Alguns dos valores médios obtidos para a evolução simulada das taxas de mortalidade (Método dos Mínimos Quadrados)	117

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Esperança de vida à nascença (anos), Portugal, 2001- 2009.....	16
Figura 4.1 - Estrutura de uma Obrigação de Sobrevivência/Longevidade	31
Figura 4.2 - Estrutura de uma Obrigação de Longevidade com o nocional em risco....	33
Figura 4.3 - Estrutura de uma Obrigação de Longevidade de cupão zero com maturidade τ	34
Figura 4.4 - Estrutura de um Swap de Sobrevivência.....	37
Figura 4.5 - Estrutura de um <i>q-forward</i> com maturidade τ	39
Figura 7.1 - Estrutura dos pagamentos das Obrigações de Sobrevivência utilizadas na aplicação	60
Figura 7.2 - Taxas de mortalidade desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 - Homens.....	62
Figura 7.3 - Taxas de mortalidade desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 - Mulheres	63
Figura 7.4 - BCE <i>spot rate yield curve</i> estimada a 31 de Dezembro de 2010 – <i>Rating “AAA” e inferiores</i>	65
Figura 7.5 - Valores estimados para os parâmetros $A1(t)$ (esquerda) e $A2(t)$ (direita) para os homens (Método dos Mínimos Quadrados)	67
Figura 7.6 - Valores estimados para os parâmetros $A1(t)$ (esquerda) e $A2(t)$ (direita) para as mulheres (Método dos Mínimos Quadrados).....	68
Figura 7.7 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 - Homens (Método dos Mínimos Quadrados)	69
Figura 7.8 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados).....	69
Figura 7.9 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 - Homens (Método dos Mínimos Quadrados)	70

Figura 7.10 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados)	70
Figura 7.11 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Homens (Método dos Mínimos Quadrados).....	72
Figura 7.12 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados).....	73
Figura 7.13 - Valores estimados para os parâmetros $A_1(t)$ (esquerda) e $A_2(t)$ (direita) para os homens (Função de Máxima Verosimilhança)	75
Figura 7.14 - Valores estimados para os parâmetros $A_1(t)$ (esquerda) e $A_2(t)$ (direita) para as mulheres (Função de Máxima Verosimilhança)	75
Figura 7.15 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 – Homens (Função de Máxima Verosimilhança).....	76
Figura 7.16 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres (Função de Máxima Verosimilhança).....	77
Figura 7.17 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 – Homens (Função de Máxima Verosimilhança).....	78
Figura 7.18 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres (Função de Máxima Verosimilhança).....	78
Figura 7.19 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Homens (Função de Máxima Verosimilhança)	80
Figura 7.20 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Mulheres (Função de Máxima Verosimilhança)	81
Figura 7.21 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das taxas de mortalidade, tqx , de 2011 a 2035 – Homens com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados)	84
Figura 7.22 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das taxas de mortalidade, tqx , de 2011 a 2035 – Mulheres com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados).....	85
Figura 7.23 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das probabilidades de sobrevivência, Sx, t , de 2011 a 2035 – Homens com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados).....	87
Figura 7.24 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das probabilidades de sobrevivência, Sx, t , de 2011 a 2035 – Mulheres com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados)	87

Figura 7.25 - Variância do logaritmo de Sx, t de 2011 a 2035 – Homens (Método dos Mínimos Quadrados).....	88
Figura 7.26 - Variância do logaritmo de Sx, t de 2011 a 2035 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados).....	89
Figura 7.27 - Cupão (linha cinzenta) e Cupão actualizado (linha laranja) da Obrigação de Sobrevivência – Homens	91
Figura 7.28 - Cupão (linha cinzenta) e Cupão actualizado (linha laranja) da Obrigação de Sobrevivência – Mulheres.....	91

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1- Indicadores sobre a Mortalidade e Longevidade, Portugal, 2001- 2009	16
Tabela 3.1 - Símbolos e definições principais da notação actuarial	26
Tabela 7.1 - Preço actualizado das Obrigações de Sobrevivência.....	92

1. INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, tem vindo a observar-se um aumento sem precedentes da esperança de vida, considerando também idades mais avançadas. De acordo com o Instituto Nacional de Estatística, entre 1970 e 2009, a esperança de vida aos 65 anos (idade normal de reforma) aumentou 5 anos, para 18,5 anos.

Um acréscimo de tal magnitude implica por sua vez um aumento importante, e de certa forma não antecipado, dos gastos associados a prestações de longo prazo, nomeadamente as anuidades. Dada esta situação, também os Governos têm diminuído os benefícios das pensões estatais e tendem a oferecer incentivos aos indivíduos para pouparem para a reforma.

De acordo com Bravo (2007), o risco de longevidade designa “o risco de desvios sistemáticos da mortalidade, face aos valores esperados (ou projectados), no sentido em que um indivíduo ou uma população sobrevivem sistematicamente para além do esperado”. De forma a criar uma solução para a sua cobertura, os mercados financeiros têm procurado desenvolver algumas propostas de produtos, com o objectivo da transferência do risco para os investidores e conseguir com isso um mercado de pensões mais justo e eficiente, onde o prémio de risco não seja transferido para o consumidor final.

Em Dezembro de 2003, a *Swiss Re* emitiu a primeira obrigação com cash-flows indexados à realização de um índice de mortalidade $M_{x,t}$, ou seja, indexada ao cenário de uma mortalidade potencialmente adversa.

Uma outra inovação dos mercados de capitais, as obrigações de sobrevivência (ou longevidade), providencia às companhias de seguros de vida e às empresas com planos de pensões um instrumento para cobrir este risco. Foram propostas por Blake e Burrows (2001) e os cash-flows são variáveis ao longo da vida do instrumento, diminuindo com a passagem do tempo, de acordo com a evolução de determinado índice de sobrevivência.

Para lidar com esta situação no mercado português, propôs-se no presente trabalho um triplo objectivo:

1. Construir um índice de longevidade para a população nacional, separando os homens das mulheres.
2. Utilizar o índice construído para a determinação dos preços de emissão de duas obrigações de sobrevivência, com cupões àquele indexados.
3. Na medida do possível, comparar os resultados obtidos com informações disponíveis, fruto de estudos semelhantes realizados para outros países.

A estrutura do texto é a seguinte: Inicia-se por uma introdução ao risco de longevidade, no Capítulo 2. No Capítulo 3 é feita uma análise ao mercado de pensões e às fontes de desvios nas previsões de longevidade, sendo discutidos alguns dos conceitos actuariais, posteriormente utilizados; é também abordada a problemática da estimação de parâmetros. No Capítulo 4, são discutidos os produtos disponíveis nos mercados financeiros para a cobertura do risco de longevidade - como é o caso das obrigações de sobrevivência. O Capítulo 5 analisa os modelos de previsão da mortalidade, especificamente o modelo de Cairns-Blake-Dowd, utilizado na aplicação. O Capítulo 6 destaca alguns aspectos teóricos e de ordem prática, essenciais à modelação da mortalidade, propriamente dita.

Finalmente, no Capítulo 7, procura fazer-se a integração dos principais elementos abordados nos capítulos anteriores. Descreve-se a aplicação, os dados e os métodos de

análise, sendo discutidas as principais conclusões de todo o processo desenvolvido. O Capítulo 8 apresenta uma súmula dos aspectos do trabalho considerados mais salientes e também algumas propostas de estudo futuro.

2. O RISCO DE LONGEVIDADE

2.1 EVOLUÇÃO DAS TAXAS DE MORTALIDADE

A evolução da longevidade humana nos países industrializados sofreu nas últimas décadas uma profunda alteração na sua estrutura. Os melhoramentos nos cuidados médicos e padrões de vida, nomeadamente os progressos da medicina, estilos de vida mais saudáveis, e também a ausência de pandemias e conflitos militares à escala global criaram nesses países as condições para as pessoas aumentarem a esperança de vida em todas as idades. Baseando-nos nas bases de dados demográficas disponíveis, as tendências históricas mostram que a esperança de vida, bem como a esperança máxima de vida, aumentaram gradualmente durante o século XX.

Especificamente para Portugal, e de acordo com o Instituto Nacional de Estatística (Estatísticas Demográficas e Estimativas Provisórias de População Residente 2001-2009), entre 2001 e 2009 a esperança de vida à nascença aumentou em Portugal 2,95 anos para os homens e 2,06 anos para as mulheres e situou-se em 76,34 anos e 82,43 respectivamente, valores acima da média europeia¹ (74,7 anos nos homens e 81,5 anos nas mulheres em 2007).

¹ Eurostat (2009) - Statistics in Focus, Population and Social Conditions, 66/2009.

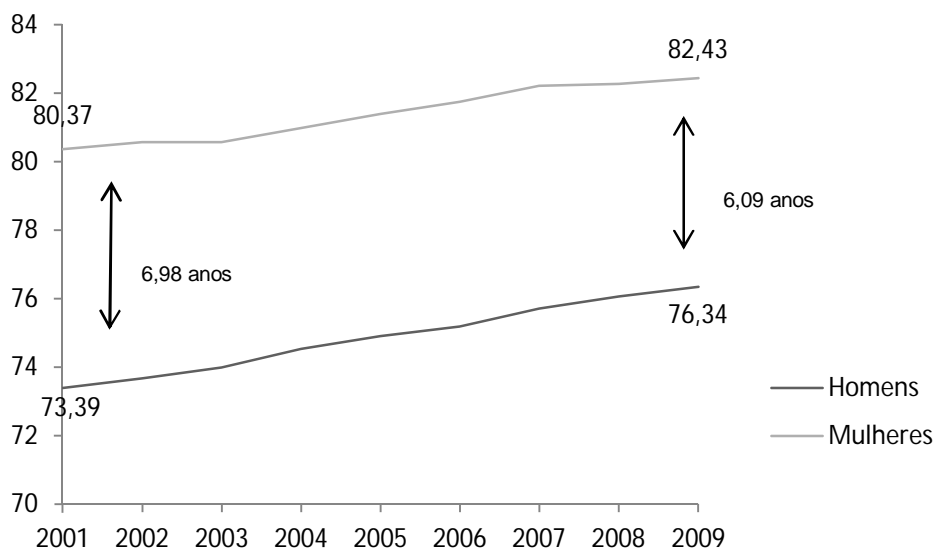
Tabela 2.1- Indicadores sobre a Mortalidade e Longevidade, Portugal, 2001- 2009

Indicadores	Anos								
	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Esperança de vida à nascença (anos)									
Homens	73,39	73,68	74	74,53	74,9	75,18	75,71	76,06	76,34
Mulheres	80,37	80,56	80,57	80,98	81,39	81,75	82,22	82,27	82,43
Esperança de vida aos 45 anos (anos)									
Homens	31,78	31,91	31,94	32,26	32,52	32,67	33,02	33,19	33,38
Mulheres	36,98	37,13	37,1	37,39	37,69	37,97	38,42	38,45	38,59
Esperança de vida aos 65 anos (anos)									
Homens	15,55	15,68	15,68	15,95	16,16	16,31	16,66	16,8	16,96
Mulheres	19,01	19,15	19,07	19,3	19,55	19,78	20,17	20,2	20,35

Fonte: INE, I.P. Estatísticas Demográficas e Estimativas Provisórias de População Residente 2001-2009.

O ritmo de crescimento da longevidade à nascença, no período em análise, foi superior entre os homens do que entre as mulheres, como se pode ver na Figura 2.1. Esta evolução provocou o atenuar do fenómeno da sobremortalidade masculina, expresso no excesso da mortalidade dos homens em relação às mulheres, à semelhança do verificado em outros países.

Figura 2.1 - Esperança de vida à nascença (anos), Portugal, 2001- 2009



Fonte: INE, I.P. Estatísticas Demográficas e Estimativas Provisórias de População Residente 2001-2009.

Assim como noutros países desenvolvidos, o decréscimo da mortalidade tem sido influenciado por um lado por uma significativa redução da mortalidade associada a doenças infecciosas que afectaram principalmente a franja da população mais jovem – mais evidente durante a primeira parte do século – e por outro lado por um decréscimo na mortalidade nas idades mais avançadas – situação mais acentuada durante a segunda metade.

Como consequência disso, de acordo com Bravo *et. al.* (2009), a percentagem de indivíduos que sobrevivem até uma idade mais elevada (ex. 80 anos e acima) aumentou significativamente, representando em 2006 2,90% (4,90%) da população masculina (feminina) portuguesa. Assim, este acréscimo elevou os índices de longevidade para valores que se consideravam impensáveis no passado. De acordo com as tábuas de mortalidade para a população portuguesa publicadas pelo INE, em Portugal a esperança de vida aos 65 anos aumentou de 11,49 (13,9) anos em 1930/31 para 16,96 (20,35) anos em 2009.

2.2 RISCO DE LONGEVIDADE E RISCO DE MORTALIDADE

Os termos risco de longevidade e risco de mortalidade são usados de forma indistinta, apesar de representarem, na prática, conceitos opostos.

Assim, citando Bravo (2007), enquanto o risco de longevidade designa o risco de desvios sistemáticos da mortalidade face aos valores esperados (ou projectados), no sentido em que um indivíduo ou uma população sobrevivam sistematicamente para além do esperado, o termo risco de mortalidade é usado, regra geral, para descrever o risco de que uma população viva, em termos agregados, menos que o esperado, ou seja, que a mortalidade seja superior ao previsto.

2.3 ANÁLISE DA SUSTENTABILIDADE DOS SISTEMAS DE SEGURANÇA SOCIAL

As melhorias na longevidade têm impacto directo nos preços de qualquer tipo de produto ligado a prestações de longo prazo, nomeadamente as anuidades. Os sistemas tradicionais de Segurança Social do tipo *pay-as-you-go* estão-se a tornar insustentáveis e requerem aumentos nas taxas de contribuição, redução das pensões e aumento da idade da reforma. Como consequência, têm-se assistido a novos padrões de comportamento como o aumento da poupança de privados para o período da reforma e o incentivo por parte dos Estados à alocação das poupanças para esse período da vida, o que torna premente a construção de soluções nos mercados financeiros.

No domínio da Segurança Social, a tendência para a implementação de novos modelos, assentes numa estrutura que combina os tradicionais mecanismos de repartição com sistemas complementares públicos e/ou privados de contribuição definida, baseados em contas individuais em regime de capitalização (real ou virtual), vai de encontro às doutrinas que sustentam que a actuação do Estado Social deve ser pautada pelo respeito do princípio da subsidiariedade - neste caso, no que toca à relação entre o Estado e o sector privado na oferta de protecção aos rendimentos na velhice.

Na prática, o fim do papel monopolista do Estado neste domínio, com a criação de mecanismos de concorrência efectiva entre os vários subsistemas, assegurando a liberdade de escolha dos cidadãos e a sua co-responsabilização pelos rendimentos na reforma, depende, em boa medida, da existência no mercado de instrumentos financeiros que permitam uma adequada cobertura do risco de longevidade.

Nos sistemas do tipo *pay-as-you-go* esta função é assegurada pela provisão de uma pensão pública de benefício definido. A moderação dos benefícios concedidos pelos sistemas de repartição, a progressiva conversão dos planos privados de pensões de benefício definido em planos de contribuição definida e a tendência para a adopção de sistemas de Segurança Social mais assentes em mecanismos de capitalização, tenderão a

reduzir a parcela do rendimento na reforma que é “garantida”. Neste cenário, a criação de um mercado privado de anuidades vitalícias, competitivo e eficiente, emerge como um auxiliar natural da função de seguro social desempenhada pelas pensões públicas.

Sendo essa a tendência, assistir-se-á a um crescimento da concorrência e um mercado de anuidades vitalícias competitivo, que deve ser capaz de oferecer aos cidadãos um leque variado de produtos financeiros, proporcionando fluxos de rendimento complementares, estruturados segundo planos de prémios ajustados às necessidades e motivações de cada indivíduo, gerando benefícios em termos nominais ou reais, constantes ou variáveis, incluindo eventualmente garantias adicionais que cubram, por exemplo, as despesas de saúde na velhice.

Do ponto de vista colectivo, na ausência de um mercado privado de anuidades vitalícias, os indivíduos podem ter um incentivo para gastar a sua riqueza financeira e patrimonial muito rapidamente, face aos horizontes de vida esperados, sabendo que em caso de esgotarem prematuramente as suas reservas podem sempre reclamar dos governos benefícios adicionais.

Em Portugal, a constatação de que a protecção social tem de assentar num sistema multipilar conduziu à criação de condições para o desenvolvimento dos regimes complementares, como é o exemplo dos fundos de pensões, surgindo em 1985 legislação sobre o tema (Garcia, 2003). Os fundos de pensões têm vindo a ser considerados dos grandes investidores institucionais, e protagonistas do processo de formação de capital de longo prazo, atendendo ao lapso de tempo que decorre antes da liquidação das pensões futuras (Garcia, 2001).

Em suma, as alterações demográficas e as modificações nos sistemas públicos e privados de Segurança Social permitem perspectivar um crescimento significativo na procura de anuidades e de soluções que cubram o risco de uma longevidade acrescida. Em paralelo, é de prever igualmente um crescimento da oferta neste mercado, sendo que para tal os poderes públicos têm um papel fundamental, seja pela divulgação e disseminação de informação de qualidade sobre a mortalidade, pela criação de incentivos fiscais, pelo desenvolvimento do mercado de derivados da mortalidade, que

será analisado no Capítulo 4 deste trabalho, ou pela sensibilização dos cidadãos em relação à necessidade de se protegerem face a uma longevidade acrescida.

3. PENSÕES, ANUIDADES E RISCO DE LONGEVIDADE

3.1 ANÁLISE DAS FONTES DE DESVIOS NAS PREVISÕES DE LONGEVIDADE

As tendências observadas na longevidade criam múltiplas implicações no desenvolvimento económico, social e humano das sociedades. Com efeito, Cutler e Meara (2001), Willets *et al.* (2004) e Garcia (2001) são alguns dos muitos autores que analisam as implicações deste fenómeno.

De facto, a tendência observada na longevidade deve ser tida em conta no *pricing* e no cálculo das responsabilidades financeiras, nomeadamente nos produtos que incluem benefícios de longo prazo (por exemplo, as anuidades). O cálculo do valor actual esperado dos cash-flows futuros requer uma projecção adequada, tanto a nível das variáveis económicas (inflação, taxa de desconto, taxa de aumento das pensões), bem como a nível demográfico (taxas de mortalidade, percentagem de reformas antecipadas por doença ou por incapacidade, existência ou não de dependentes, entre outros), tendo como objectivo a minimização de riscos de sub ou sobre estimação das responsabilidades de uma carteira. Em muitos estudos como Pollard (1987) e Booth (2006), são usados modelos estocásticos para esta finalidade.

Todavia, a utilização destes modelos não elimina a possibilidade de desvios face aos valores projectados. Estes riscos advêm de quatro fontes de desvios distintas.

Em primeiro lugar, a natureza estocástica do número de óbitos, faz com que em cada ano de calendário se verifiquem flutuações aleatórias nas taxas de mortalidade observadas, face aos valores esperados. Este risco é conhecido como “risco de processo” e uma das principais formas de verificar a sua diminuição é aumentar a dimensão da carteira (homogénea) em observação, apelando à lei dos grandes números (*pooling risk*).

A segunda fonte de desvios está relacionada com a deficiente modelação. Os desvios são explicados pela incerteza em torno dos valores dos parâmetros do modelo de projecção (o chamado “risco de parâmetro”) e também pela dúvida na escolha do modelo que melhor pode captar as tendências na mortalidade (denominado “risco de modelo”). Estes desvios não podem ser eliminados com o aumento da dimensão da carteira e o seu impacto financeiro aumenta à medida que a carteira cresce, já que afectam da mesma forma todas as pessoas beneficiárias da carteira.

A terceira fonte de desvios corresponde à mortalidade catastrófica, isto é, um desvio associado a uma situação de mortes extremas, como é o caso de conflitos militares, sismos, inundações, entre outros.

A última fonte de desvios é relativa ao risco de base, i.e., ao risco de que o comportamento da mortalidade da população que serviu de base à estimação dos modelos seja substancialmente diferente da observada.

A incerteza relativamente às tendências futuras constitui por si um output de alguns dos modelos estatísticos usados para analisar o comportamento passado e para projectar a mortalidade. Por isso, de modo a ser efectuada uma correcta avaliação das responsabilidades financeiras futuras dos fundos de pensões e empresas que vendem anuidades, devem-se ter em atenção estes riscos e utilizar um modelo que minimize o erro de estimação.

3.2 ALGUNS CONCEITOS ACTUARIAIS

3.2.1 FUNÇÃO DE SOBREVIVÊNCIA

Seja X a variável aleatória (v.a.) que representa o tempo de vida expresso em anos de um recém-nascido. Trata-se de uma variável aleatória contínua, que se assume ter densidade $f(x)$ e função de distribuição $F(x)$. Tem-se, desta forma:

$$f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{para } x < 0 \\ > 0 & \text{para } 0 < x < \omega \\ = 0 & \text{para } x > \omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde ω representa a idade a partir do qual não é admitida a hipótese de sobrevivência do indivíduo (“idade extrema”). No limite, pode escrever-se $\omega = \infty$, atribuindo probabilidades nulas às idades inatingíveis.

A função de sobrevivência S_x representa a probabilidade do acontecimento $X > x$ e é dada pela igualdade

$$S_x = 1 - F(x). \quad (3.2)$$

As propriedades das funções de distribuição e a condição (3.1) permitem concluir que, para uma dada função contínua e derivável no intervalo $(0, \omega)$ poder ser considerada uma função de sobrevivência, terá que possuir as seguintes características (Garcia e Simões (2010)):

- $S_0 = 1$
- $S'_x < 0$ para $x \in (0, \omega)$
- $S_x = 0$ para $x \geq \omega$

Os autores notam que, geralmente, se restringe o domínio de S_x ao intervalo $[0, \omega]$.

3.2.2 TAXAS DE MORTALIDADE E SOBREVIVÊNCIA

É sabido que num contexto dinâmico a evolução da mortalidade é analisada em função de dois factores: a idade x e o período t . Assim, designa-se por ${}_t p_x$ a probabilidade de uma pessoa de idade x atingir a idade $x+t$ e por ${}_t q_x$ a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer antes de atingir a idade $x+t$. Temos então que ${}_t p_x + {}_t q_x = 1$.

As probabilidades de sobrevivência ${}_t p_x$ e as probabilidades de falecimento ${}_t q_x$ (ambas com $t \geq 0$) são definidas, respectivamente, por

$${}_t p_x = \mathbb{P}(X > x + t \mid X > x) = \frac{S_{(x+t)}}{S_{(x)}}, \quad (3.3)$$

e por

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{S_{(x+t)}}{S_{(x)}}. \quad (3.4)$$

Os actuários utilizam uma notação abreviada ao ocultarem, quando $t = 1$ ano, o índice t , i.e., ${}_1 p_x = p_x$ e ${}_1 q_x = q_x$.

Também se define a taxa de mortalidade central para pessoas com idade x no momento t , seja

$${}_t m_x = \frac{D_{(t,x)}}{E_{(t,x)}}, \quad (3.5)$$

em que $D_{(t,x)}$ designa o número de mortes durante um ano de calendário t com idade x e $E_{(t,x)}$ representa a população média durante um ano de calendário t com idade x .

Para uma discussão mais detalhada sobre ${}_tq_x$ e ${}_tm_x$, vide Benjamin e Pollard (1980) ou Bowers *et. al* (1986). Segundo Cairns *et. al.* (2006a), uma aproximação clássica que relaciona as duas taxas e que vai ser usada mais tarde é dada por

$${}_tm_x = \frac{{}_tq_x}{1 - \frac{1}{2} {}_tq_x}. \quad (3.6)$$

Conhecida a sequência $\{m_x : x = 1, 2, \dots\}$, é possível construir a função de sobrevivência para idades x inteiras:

$$S_{(x+1)} = S_{(x)}(1 - {}_tm_x), \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

relembrando a característica inicial, $S_0 = 1$

3.2.3 FORÇA DE MORTALIDADE

Neste ponto introduz-se mais uma medida de mortalidade, a força de mortalidade, μ_x . Esta é a taxa de mortalidade instantânea para pessoas com idade x . Define-se por

$$\mu_{x,t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_hq_x}{h}, \text{ com } h > 0. \quad (3.8)$$

Isto significa que μ_x é uma medida relativa da mortalidade no momento em que a idade x é atingida, enquanto q_x mede a mortalidade ao longo de um ano, isto é, variando a idade entre x e $x + 1$. Com efeito, conhecendo a expressão algébrica de μ_x , pode-se determinar as probabilidades de mortalidade e de sobrevivência, por integração. Assim, integrando μ_{x+t} entre o período 0 e n , obtém-se

$${}_np_x = \exp \left[- \int_0^n \mu_{x+t} dt \right], \quad (3.9)$$

pelo que

$${}_nq_x = 1 - \exp \left[- \int_0^n \mu_{x+t} dt \right]. \quad (3.10)$$

Como resumo, considere-se a Tabela 3.1:

Tabela 3.1 - Símbolos e definições principais da notação actuarial

Símbolos	Definições ou Expressões
X	Variável aleatória que representa a duração da vida de um recém-nascido.
$f(x)$	Densidade de probabilidade associada a X .
$F(x)$	Função de distribuição da v.a. X .
S_x	Função de sobrevivência associada a X : $S_x = 1 - F(x)$.
$(0, \omega)$	Suporte da distribuição de X
$[x]$	Pessoa de idade x
${}_tp_x$	Probabilidade de $[x]$ estar vivo à idade $x + t$
${}_tq_x$	Probabilidade de $[x]$ morrer antes de atingir a idade $x + t$
μ_x	Força de mortalidade à idade x
T	Variável aleatória representando o tempo de vida futuro de $[x]$.

Fonte: Garcia e Simões (2010).

3.3 ANUIDADES

Uma anuidade (ou renda) vitalícia é um contrato mediante o qual uma entidade se compromete a pagar a um beneficiário com idade inicial x um conjunto de rendimentos de forma periódica, enquanto este estiver vivo, caso não exista qualquer cobertura que seja estendida aos dependentes (cônjuge ou descendentes).

Segundo Bravo (2007), uma anuidade pode ser decomposta numa sequência de cupões com diferentes maturidades. Considere-se uma anuidade que paga um benefício de montante C no início de cada período $t = 0, 1, 2, \dots$, em caso de sobrevivência do beneficiário da apólice. O seu valor justo, assumindo pagamentos discretos, é dado por

$$\ddot{a}_x(C) = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_tE_x \quad (3.11)$$

3.4 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

A estimação da mortalidade através de modelos paramétricos baseia-se no pressuposto de que as probabilidades q_x podem ser traduzidas numa função $f(x; \theta)$ de idade x e de um conjunto finito $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)'$ de parâmetros desconhecidos. Estes são determinados a partir de estimativas brutas $\hat{Q} = \{\hat{q}_x, x = x_{min}, \dots, x_{max}\}$, calculadas com base nas estatísticas disponíveis da mortalidade e na população exposta ao risco. Considerando $\hat{\theta}$ como o estimador de θ , os métodos paramétricos de graduação consistem em substituir a série \hat{Q} por

$$\hat{Q}^{ogra} = \{\hat{q}_x^{ogra} = f(x; \hat{\theta}), x = x_{min}, \dots, x_{max}\} \quad (3.12)$$

Daqui resulta que toda a informação disponível é descrita num conjunto restrito de parâmetros. Desta forma, desde que o modelo paramétrico reflecta adequadamente a mortalidade da população considerada, os resultados serão precisos e muito mais fáceis de utilizar.

As dificuldades que se encontram são as habituais: um bom ajustamento pode requerer um significativo número de parâmetros, e o que pode comprometer a regularidade das estimativas. Como salienta Keyfitz (1982), na implementação desta abordagem é necessário encontrar um equilíbrio.

Para estimar o valor dos parâmetros da função $f(x; \theta)$, são comumente utilizados o método dos mínimos quadrados e a função de máxima verosimilhança, que também serão usados neste trabalho.

4. COBERTURA DO RISCO DE LONGEVIDADE

No seu trabalho de 2009, Bravo *et. al.* afirmam que, historicamente, os mercados de anuidades apresentam um claro subdesenvolvimento, visível na diferença entre a baixa procura e a larga oferta.

De acordo com estes autores, as limitações da procura incluem em primeiro lugar o sentimento de sobre estimação no cálculo do preço das anuidades, visto que a maior fatia das empresas de seguros segue uma prática convencional que envolve a aplicação do princípio da equivalência e o uso de bases técnicas (demográficas e económicas) determinísticas prudentes. Em segundo lugar, a procura por anuidades é muitas vezes tomada em consideração apenas se existir opinião familiar favorável. Para além disso, os próprios incentivos fiscais são considerados insuficientes para um indivíduo ser estimulado a proteger-se contra o risco de longevidade. Há que também ter em conta que os investimentos alternativos nos mercados de capitais são considerados como mais atractivos e com maior rentabilidade.

Relativamente ao lado da oferta de anuidades, é necessário um aumento na precisão e qualidade da informação contida nas tabelas de mortalidade. A incerteza relativamente a essa informação pode fazer com que as seguradoras determinem os preços de forma prudente e transfiram assim esse risco para o cliente. Por outro lado, independentemente da maior ou menor margem de segurança que a escolha de uma tábua de mortalidade conservadora pudesse representar no momento da celebração de contratos, a verdade é que a evolução da longevidade reforça a ideia de que estas empresas estão expostas ao risco de longevidade.

Para além de tudo isto, os autores acrescentam que os mercados tradicionais de anuidades estão incompletos, no sentido em que não oferecem protecção contra a inflação, tendo carência de exposição ao mercado de capitais, são ilíquidos e não estão seguros contra catástrofes de mortalidade. Finalmente, existem preocupações sobre os requisitos de capital regulamentar ou com a força das empresas já existentes no mercado, que tornam difícil a entrada de novas empresas.

Nos últimos anos, os projectos Solvência e o IASB têm insistido na necessidade de avaliar os activos e responsabilidades pelo seu valor justo, i.e., pelo valor de mercado. De acordo com Dias (2006), esta proposição determina que as avaliações devem considerar convenientemente todos os factores de risco, sejam eles demográficos ou económicos, diversificáveis ou sistemáticos, e fundamentar as hipóteses utilizadas na medição.

Em consequência disso, as companhias têm procurado diferentes mecanismos de cobertura do risco de longevidade, que envolvam técnicas clássicas no mercado de seguros ou titularização dos riscos ou até a criação de um mercado de derivados de mortalidade. Entre as técnicas clássicas, refira-se o desenho dos produtos e adopção de estratégias de *pricing* distintas, que passam pela inclusão de mecanismos de redistribuição de resultados entre os beneficiários. Mas é nos mercados financeiros que têm surgido algumas soluções inovadoras, que permitem usar a baixa correlação com os activos existentes e assim efectuar uma cobertura efectiva das melhorias da longevidade no mundo.

4.1 PRODUTOS E ESTRATÉGIAS DE COBERTURA CLÁSSICAS

Uma das primeiras técnicas ao dispor das companhias de seguros e sociedades gestoras de fundos de pensões para abrandar o risco de longevidade passa por redesenhar as características dos produtos tradicionais oferecidos.

Uma solução possível passa por aplicar um peso adicional aos prémios (*safety loadings*) segundo técnicas determinísticas.

Outra solução envolve a oferta de anuidades vitalícias com prémios variáveis, i.e., de acordo com a evolução da esperança de vida da geração a que pertence o beneficiário. Esta forma permite a transferência de grande porção do risco de longevidade para os beneficiários, mas devido à menor competitividade que a empresa pode ter no mercado, não é uma solução comumente utilizada.

Blake *et. al.* (2003) descrevem também formas alternativas, nas quais as anuidades pagam bónus (*survivor credits*) aos beneficiários em função das taxas de mortalidade observadas na população abrangida. Este método contrasta com as tradicionais anuidades em que os benefícios são baseados exclusivamente em probabilidades de sobrevivência no momento da compra do produto.

Outra solução passa por uma estratégia de *pricing* diferenciada entre os indivíduos, de acordo com os seus factores específicos de risco, entre eles, estado de saúde, estilo de vida, etc. Estes pesos adicionais diferenciados (*contingency loadings*), minimizaria a subsidiação cruzada que existe actualmente entre indivíduos em diferentes estados de saúde, e beneficiaria aqueles em melhor condição.

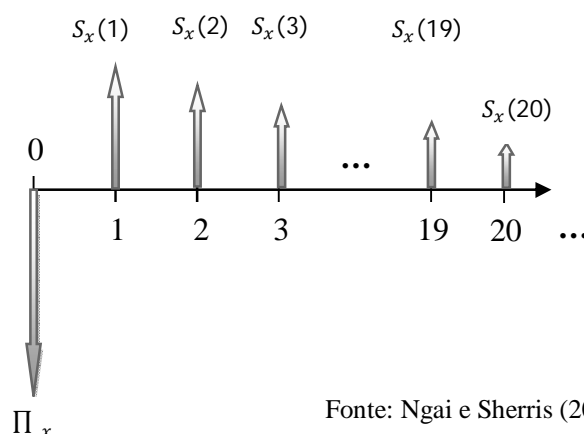
4.2 OBRIGAÇÕES DE SOBREVIVÊNCIA / LONGEVIDADE

Um assunto premente neste tipo de mercado é a exposição ao risco de longevidade e os riscos associados às suas melhorias, que nunca foram efectivamente cobertos através de titularização. Assim, têm-se desenvolvido alguns produtos nesse sentido, nomeadamente as obrigações de sobrevivência (ou de longevidade), que são instrumentos financeiros onde os pagamentos dependem da realização de um índice $S_{x,t}$ para um período t . O índice referido é a proporção de indivíduos da população com idade x no período $t = 0$, que ainda estão vivos num período t futuro. Assim, seja ${}_tq_x$ a taxa de mortalidade entre o período x e t para membros da população de referência com idade x no momento 0 e que ainda estão vivos no momento t ; então,

$$S_{x,t} = (1 - {}_0q_x)(1 - q_x) \dots (1 - {}_{t-1}q_x). \quad (4.1)$$

Por exemplo, para uma obrigação emitida no ano 2010, o cupão em 2020 vai ser proporcional à fracção das pessoas com 65 anos que em 2020 continuam vivos. Assim, os cupões irão diminuindo ao longo do tempo, mas continuam em pagamento até os últimos membros do grupo morrerem. Os cash-flows envolvidos nestas obrigações são ilustrados na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Estrutura de uma Obrigação de Sobrevivência/Longevidade



Este tipo de obrigações foram inicialmente propostas por Blake e Burrows (2001) e já vários produtos deste tipo foram emitidos e estão a ser ainda criados alguns similares, referidos mais adiante.

Todavia, ainda existem alguns pontos nos quais o produto não é consensual. Por exemplo, existem alguns defensores de que os governos devem emitir obrigações de sobrevivência/longevidade e com isso ajudar as emitentes de anuidades a cobrir o risco de longevidade. Por exemplo, Blake e Burrows (2001) e Blake (2003) argumentam que estas obrigações sejam emitidas pelos Estados. Para fundamentar a sua proposta, argumentam desde logo que o Estado deve suprimir a falha de mercado que representa a inexistência de mecanismos de cobertura do risco de longevidade pelas empresas privadas. Sustentam ainda que a dispersão do risco pelos contribuintes elimina o prémio de risco associado e que o Estado contribui para o aumento da longevidade (por exemplo, através dos sistemas públicos de saúde), pelo que deve suportar as consequências dessas políticas. No entanto, um contra-argumento por Dowd (2003), onde questiona a transferência de mais risco de longevidade para o Estado, na medida

em que este já está consideravelmente exposto, seja através dos sistemas de segurança social (assentes em mecanismos de repartição), seja através dos sistemas públicos de saúde. Este autor argumenta ainda que os mercados de capitais estão melhor preparados para suportar e partilhar riscos que o Estado, que apenas diversifica os riscos entre os contribuintes, enquanto nos mercados é possível uma diversificação internacional. Brown e Orszag (2006) também questionam se os governos devem ou não emitir obrigações de longevidade, dada a sua exposição aos riscos existentes através de sistemas públicos de pensões, apesar de sugerir que o Estado pode ter um papel importante na partilha inter-geracional de riscos de longevidade. Por seu turno, *the UK Pensions Commission* (2005), argumenta que existe justificação para a emissão de tais produtos por parte do Governo, mas apenas se este conseguir cobrir alguns dos riscos que enfrenta neste momento. Em particular, sugere que o Estado deve parar de cobrir o risco de longevidade das gerações mais jovens através da idade legal de reforma, que é fixa durante longos períodos de tempo e, portanto, independente do aumento da longevidade. Esta Comissão argumenta que os jovens são *hedgers* naturais desse risco através da sua capacidade de prolongar a vida de trabalho.

É ainda assim consensual que as obrigações seriam transaccionadas em mercados secundários, podendo ser transferidas em qualquer momento, de acordo com o seu preço de mercado. Esta seria uma solução para as empresas que detêm planos de pensões com muitas pessoas, na medida que podem comprar este produto para cobrir o risco de longevidade dos seus membros. Assim, estas obrigações permitem que o regime de pensões seja uma responsabilidade partilhada entre o sector público e o sector privado.

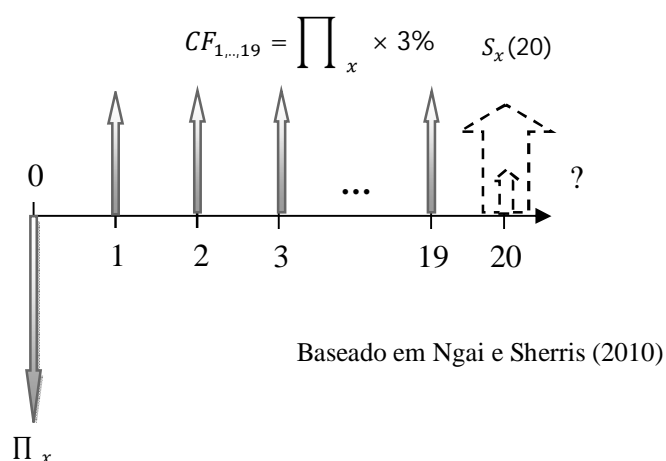
Naturalmente, o objectivo é diminuir os custos das provisões para com os membros, bem como para o próprio reformado. Existem ainda assim riscos associados que se mantêm e que há que ter em conta: em primeiro lugar, deve atender-se à possibilidade dos adquirentes das anuidades viverem mais do que a média da população com a mesma idade. Em segundo lugar, a própria companhia que vende as anuidades apenas analisa um conjunto restrito de vidas e as características dos seus clientes podem variar muito da população no seu todo.

Em suma, através da minimização do risco global, as companhias de seguros teriam os incentivos adequados para desenvolver uma boa aposta nas previsões da mortalidade e permitir a oferta de seguros adequados contra riscos não sistemáticos.

4.3 OBRIGAÇÕES DE LONGEVIDADE COM O NOCIONAL EM RISCO

São obrigações semelhantes às *plain vanilla*, onde os cupões são pagos de acordo com uma taxa fixa, ou indexados a uma taxa variável. Todavia, a grande diferença é que agora é o valor nocional que é pago de acordo com a evolução de um determinado índice de sobrevivência, um índice $S_{x,t}$ para o período t (vencimento da obrigação). Tomando como exemplo uma obrigação a 20 anos deste tipo, com cupões a uma taxa fixa de 3%, os cash-flows envolvidos nestas obrigações são ilustrados na Figura 4.2.

Figura 4.2 - Estrutura de uma Obrigação de Longevidade com o nocional em risco

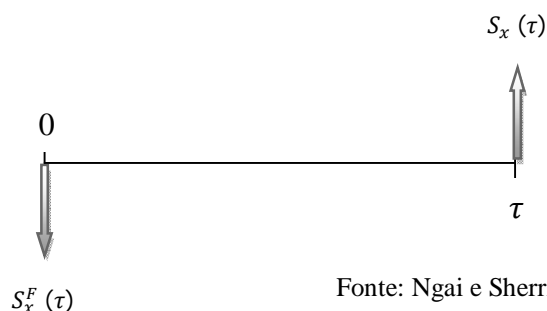


4.4 OBRIGAÇÕES DE LONGEVIDADE COM CUPÃO ZERO

De acordo com Blake *et. al.* (2006b), as obrigações de sobrevivência / longevidade descritas no Ponto 4.2 fornecem uma série de cupões anuais. No entanto, como aconteceu no mercado das *gilts*, pode-se prever que as obrigações de longevidade de um único cupão (“obrigações de longevidade com cupão zero”) podem ser emitidas formalmente ou ser criadas artificialmente através da engenharia financeira dos mercados, mediante o *stripping* das obrigações de longevidade *plain vanilla*.

O cash-flow envolvido nestas obrigações é ilustrado na Figura 4.3.

Figura 4.3 - Estrutura de uma Obrigação de Longevidade de cupão zero com maturidade τ



Fonte: Ngai e Sherris (2010)

O interesse destas obrigações resulta de permitem ao detentor construir uma carteira com várias maturidades específicas e ajustada às necessidades de pagamento de anuidades. Desta forma, vai permitir que as companhias de seguros construam carteiras de títulos de longevidade que se encaixam com a maturidade pretendida para o seu período de cobertura. No entanto, segundo Blake *et. al.* (2006b), é provável que o mercado de obrigações de cupão zero fosse bastante ilíquido, já que a maioria dos títulos seriam comprados numa base de *buy-and-hold*.

4.5 OBRIGAÇÕES DE LONGEVIDADE INVERSAS

Este tipo de produto é de certo modo comparável com as obrigações com taxa variável inversa, em que $f_t(S_{x,t})$ é a função inversa de $S_{x,t}$. Um exemplo deste tipo de produto consiste em considerar que o pagamento é uma função $f_t(S_{x,t}) = k(1 - S_{x,t})$, para qualquer $k > 0$. Estas obrigações são inspiradas nas convencionais *inverse floaters*, obrigações de taxa variável em que os cupões variam inversamente com os movimentos nas taxas de juro.

Deste modo, ao contrário das tradicionais obrigações de longevidade / sobrevivência, os pagamentos de cupão aumentam ao longo do tempo, baseadas no índice de sobrevivência $(1 - S_{x,t})$.

4.6 OBRIGAÇÕES DE LONGEVIDADE COLATERALIZADAS (CLO)

As obrigações de longevidade colateralizadas (CLO) são comparáveis às convencionais obrigações de dívida colateralizadas (CDO). Da mesma forma que uma CDO é uma fracção de um conjunto de instrumentos de dívida, uma CLO é uma fracção de um conjunto de obrigações de longevidade. Deste modo, cada tranche provoca diferentes exposições ao risco de longevidade (por exemplo, a primeira tranche pode absorver 5 por cento de quaisquer ganhos ou perdas, a segunda parcela poderá absorver os 5 por cento seguintes, etc.). Assim, cada tranche teria, portanto, diferentes exposições ao risco e, correspondentemente, diferentes retornos esperados.

4.7 OBRIGAÇÕES DE CATÁSTROFE DE LONGEVIDADE

Uma obrigação de catástrofe de mortalidade tem como principal objectivo cobrir o risco de brevidade. Este risco refere-se ao facto da vida de um determinado segurado ser muito curta ou, pelo menos, mais curta que o esperado. Partindo da perspectiva da seguradora, é o risco de os benefícios serem pagos mais cedo do que o esperado. O risco de brevidade é discutido mais detalhadamente em MacMinn e Richter (2004).

Nas obrigações de catástrofe de longevidade, os cash-flows baseiam-se num índice de mortalidade $M_{x,t}$ para o período t . O retorno dos cupões pode estar indexado a uma taxa fixa ou variável, mas o pagamento do valor nominal está dependente do valor realizado deste índice, que mede as taxas de mortalidade de uma determinada população. Desta forma, em comparação com as obrigações com o nominal em risco, a diferença está relacionada com o índice utilizado: Enquanto nas obrigações com o nominal em risco se considera um índice de sobrevivência $S_{x,t}$ de uma amostra da população (normalmente os membros de determinado plano de anuidades), este tipo de obrigações baseiam-se na medição do risco de brevidade para toda a população de um ou mais países.

Assim, baseando-nos na data de emissão, quanto mais alto o número de mortes verificadas, mais alto o índice de mortalidade $M_{x,t}$ e menos o emitente paga na maturidade.

Esta obrigação tem um prazo normalmente curto e por isso tem como objectivo proteger o emitente contra o risco de curto prazo no caso do elevado aumento na mortalidade. Nesta situação inserem-se pandemias, catástrofes naturais ou quaisquer factores que influenciem de forma dramática e súbita a mortalidade de determinado conjunto de pessoas.

Para uma análise mais pormenorizada acerca deste tipo de obrigações, vide Ventura (2010).

4.8 SWAPS DE SOBREVIVÊNCIA

Um swap de sobrevivência é um acordo para trocar um ou mais cash-flows no futuro, baseando-se no resultado de um determinado índice de sobrevivência $S_{x,t}$ numa dada idade x e para o período t .

De acordo com Blake *et. al.* (2006a), assume-se que um determinado swap envolva uma única transacção, dependente da realização de um determinado valor do índice de sobrevivência $S_{x,t}$ para o período t . Mais precisamente, suponha-se que no momento $t = 0$, duas empresas, A e B, acordam trocar um montante K_t por um valor que depende da realização do índice de sobrevivência: $S_{x,t}$ num período futuro τ . Assim, K_t pode ser interpretado como um cupão associado a um nocional e a única troca feita é a diferença líquida entre os dois montantes.

Formalmente, temos que a empresa A paga à empresa B:

$$\max\{0, K_t - S_{x,t}\}.$$

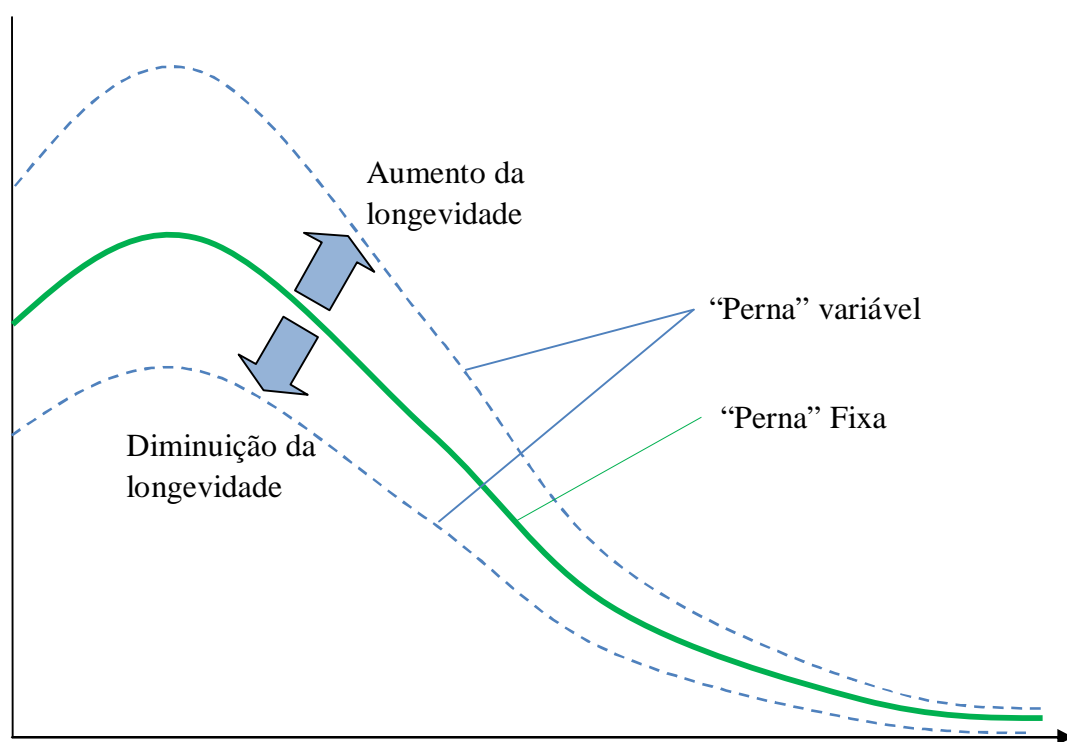
Já a empresa B paga à empresa A :

$$\max\{0, S_{x,t} - K_t\}.$$

$S_{x,t}$ designa o número de pessoas de uma população de referência que sobreviveram até ao momento t . Assim, a empresa A beneficia se $S_{x,t}$ for maior que K_t e perderá se contrário. Desta forma, a empresa A tem uma exposição longa ao risco de sobrevivência, tendo a empresa B exposição curta sobre $S_{x,t}$.

Nestas condições, o detentor do risco de longevidade pode transformar a incerteza dos cash-flows de anuidades futuras ou dos benefícios de pensões em pagamentos fixos em série. Em termos esquemáticos, temos:

Figura 4.4 - Estrutura de um Swap de Sobrevidência



Fonte: Berry, Tsui e Jones (2010)

Os swaps têm algumas vantagens face às obrigações acima revistas: em primeiro lugar, o custo das transações é mais baixo, comparando com o custo de emissão de obrigações e pode mais facilmente ser cancelado. Em segundo lugar, são produtos

flexíveis e podem ser feitos de acordo com as mais diversas circunstâncias. Para além disso, não necessitam da existência de um mercado líquido, apenas o interesse de duas partes em explorar vantagens comparativas ou desenvolver diferentes visões da evolução do mercado de longevidade.

Algumas seguradoras/empresas de venda de anuidades estão já a transaccionar swaps de sobrevivência há alguns anos, ainda assim este mercado está a dar os seus primeiros passos. Os detalhes destes contratos são ainda difíceis de esquematizar, mas a maior parte são transaccionados no mercado OTC (*over-the-counter*), em que uma das pernas está indexada à publicação dos resultados de determinada projecção de longevidade e a outra perna varia de acordo com realização de determinado índice $S_{x,t}$.

As grandes vantagens para as partes prendem-se essencialmente com a mitigação do risco, com um baixo *beta*, bem como o pouco capital necessário para diminuir especificamente o risco de longevidade.

Tais produtos podem ser usados com inúmeras finalidades. Como Lin e Cox (2005) explicam com maior pormenor, existe a possibilidade das companhias de seguros explorarem as oportunidades de cobertura criadas pela forma como os produtos por si comercializados respondem às variações na mortalidade. Um exemplo disso é estas companhias utilizarem os swaps de sobrevivência explorando as vantagens de deterem exposições opostas ao risco de longevidade, i.e., exposição longa no caso dos seguros de vida e exposições curtas no caso das anuidades.

Os swaps de sobrevivência permitem que os dois tipos de negócio em causa se compensem e assim cubram entre si os diferentes riscos que lhes estão associados. Assim, reduz-se a exposição ao risco de longevidade das empresas, o que por sua vez lhes permite reduzir os prémios de risco intrínsecos no preço de seus produtos e promover uma vantagem comparativa.

4.9 Q-FORWARDS

Um *q-forward* é um acordo em que duas partes trocam numa data futura (no vencimento do contrato) um montante proporcional à taxa de mortalidade realizada de uma determinada população (ou amostras da mesma) pelo montante proporcional à taxa de mortalidade mutuamente acordada no início, i.e., é paga a taxa de mortalidade (variável) ${}_tq_x$ em troca da taxa de mortalidade fixada no *forward*, ${}_tq_x^F$. O cash-flow envolvido neste produto com maturidade τ é ilustrado na Figura 4.5:

Figura 4.5 - Estrutura de um *q-forward* com maturidade τ



Fonte: Ngai e Sherris (2010)

Noutras palavras, estamos perante um swap sem cupões que troca uma taxa de mortalidade fixada inicialmente por uma taxa de mortalidade realizada na maturidade. Assim, a grande diferença para o swap de sobrevivência no ponto acima é que este produto apenas tem uma única transacção no vencimento.

A realização do acordo que acontece na maturidade é baseado no valor líquido a pagar e é proporcional à diferença entre a taxa de mortalidade fixa (a *forward rate* transaccionada) e a taxa ou índice de referência realizada.

De acordo com Loeys *et al* (2007), os preços dos *q-forwards* são determinados assumindo um rácio de Sharpe:

$${}_tq_x^F = (1 - S_q \sigma_x t) {}_tq_x^E, \quad (4.2)$$

em que S_q é o rácio de Sharpe para o q -forward, ${}_tq_x^E$ é a taxa de mortalidade esperada de uma população P e σ_x é a volatilidade histórica das taxas de mortalidade:

$${}_tq_x^E = E_P({}_tq_x|\mathcal{F}_0), \quad (4.3)$$

$$\sigma^2 = Var\left(\frac{\Delta {}_tq_x}{{}_tq_x}\right). \quad (4.4)$$

De acordo com os autores, o preço das obrigações de longevidade/sobrevivência é estabelecido de forma similar.

Verifica-se que se trata de um produto muito interessante para cobrir o risco de longevidade das obrigações de um plano de pensões, contratando-se um q -forward curto, no qual o plano de pensões recebe as taxas de mortalidade fixadas inicialmente e paga as taxas efectivas da mortalidade.

Para que este tipo de produto possa ter sucesso, é necessário existir um mercado líquido para compra e venda do contrato, e também é necessária a estandardização do índice de referência para analisar a mortalidade realizada. Com estes requisitos cumpridos, é possível providenciar uma cobertura efectiva de longo prazo contra o risco de longevidade para uma empresa comercializadora de anuidades ou de seguros de vida.

4.10 FUTUROS DE MORTALIDADE

Vimos acima um conjunto de produtos cujos cash-flows estão ligados à evolução de um índice de mortalidade ou de sobrevivência, ao longo do tempo. No caso dos Futuros, é considerado um conjunto específico de produtos que poderão ser negociados em bolsa.

Segundo Blake *et. al.* (2006a), a forma de um contrato de futuros de mortalidade envolve a definição do activo subjacente, $X(t)$ (normalmente a evolução do preço de um produto de longevidade, por exemplo, as obrigações de sobrevivência/longevidade), que vai determinar o retorno sobre o contrato de futuros. T designa a data de entrega do contrato, ou seja, a sua maturidade. Por vezes, elementos opcionais podem ser

incorporados num contrato de futuros, como a definição de um intervalo de datas para entrega, em vez de uma única data, mas estes contratos tendem a ser relativamente pequenos na natureza e no valor.

A mecânica de funcionamento deste mercado é similar a um futuro *plain-vanilla*: $F(t, T)$ é o preço do contrato de futuros no momento t para a entrega de $X(t)$ na maturidade T . Por definição, um contrato de futuros tem valor zero em cada momento t . No entanto, para minimizar o risco de crédito, ambas as partes são obrigadas a colocar na conta margem o valor inicial que absorve os movimentos normais de preços (*mark-to-market*). Por exemplo, no período $t+1$, o preço do contrato será $F(t+1, T)$. Se tiver havido uma alteração do preço, requer-se que os titulares das posições longa e curta verifiquem a necessidade de uma actualização na conta margem no valor de $F(t+1, T) - F(t, T)$, definindo-se o ganho ou a perda diária para ambas as partes. O valor do contrato volta então a zero. Desta forma, cada vez que exista um valor na conta margem que não permita cobrir a valorização máxima diária do contrato (no caso da posição curta) ou a desvalorização máxima (no caso da posição longa), o detentor de uma destas posições terá que efectuar novo depósito ou o contrato é encerrado.

Na maturidade, ou seja, no período T , o pagamento final da conta margem é de $F(T, T) - F(T-1, T) = X(T) - F(-1, T)$.

O desafio no contexto actual é considerar se há ou não um ou mais activos subjacentes $X(t)$, ligados a produtos de longevidade, que resultarão num mercado de futuros de sucesso. Já que $X(t)$ representa a evolução do preço de um activo negociado, a vantagem do mercado de futuros é que permite que as partes interessadas no activo subjacente possam transaccionar com menores custos, num mercado com maior liquidez do que normalmente é possível a partir da negociação no mercado *spot*.

Assim, se um mercado de obrigações de sobrevivência/longevidade se desenvolver, então vai ser possível que o mercado de futuros desenvolva também produtos que tenham como activo subjacente estas obrigações.

Outro tipo de activos subjacentes pode ser um índice de sobrevivência $S_{x,t}$ para o período t .

4.11 PRIMEIRAS EMISSÕES DE PRODUTOS NOS MERCADOS FINANCEIROS E OS PRINCIPAIS CONSTRANGIMENTOS

Após o surgimento dos primeiros artigos e trabalhos dedicados ao estudo de produtos para cobrir o risco de longevidade - caso de Blake e Burrows (2001) - apareceram algumas instituições financeiras pioneiras na sua comercialização. Assim, em Dezembro de 2003, a *Swiss Re* emitiu a primeira obrigação de catástrofe de mortalidade, onde os cash-flows estavam indexados à realização de um índice de mortalidade $M_{x,t}$, ou seja, indexada ao cenário de mortalidade adversa. A maturidade destas obrigações era de quatro anos e os investidores receberam cupões indexados a uma taxa variável mais um *spread* de 135 pontos base. Assim, apesar de os cupões apresentarem uma taxa considerada bastante competitiva, o pagamento do valor nominal no vencimento estava em risco e dependeria da forma como a média ponderada da taxa de mortalidade de cinco países (EUA, Reino Unido, França, Itália e Suíça) iria evoluir. O nominal era pago totalmente se o índice de mortalidade não excedesse em mais de 130% o nível ${}_0q_x$ fixado em 2002, em qualquer um dos três anos de vida desta obrigação. Por cada aumento de 1% sobre os 130%, o principal era reduzido em 5% e se o valor do índice excedesse os 150%, não existia lugar a pagamento de qualquer nominal.

A percentagem de perda no nominal no ano t é apresentado em 4.5:

$$L_t = \begin{cases} 0\% & \text{se } {}_tq_x < 1.3{}_0q_x \\ ({}_tq_x - 1.3{}_0q_x) \div 0.2{}_0q_x & \text{se } 1.3{}_0q_x \leq {}_tq_x \leq 1.5{}_0q_x \\ 100\% & \text{se } {}_tq_x > 1.5{}_0q_x \end{cases} \quad (4.5)$$

Assim, a esquematização dos pagamentos na maturidade T é dada pela Equação 4.6:

$$B_T = \begin{cases} Libor + Spread & t = 1, \dots, T-1 \\ Libor + Spread + \max(100\% - \sum_t L_t, 0) & t = T \end{cases} \quad (4.6)$$

Visto que nesse período as taxas de mortalidade estavam a melhorar (ou seja, a taxa estaria a diminuir), a probabilidade dessas taxas subirem até aos 130% foi considerada muito baixa, e nesse sentido os investidores obtiveram elevadas taxas de cupão para assumirem algum grau de exposição ao risco de mortalidade extrema.

Uma segunda obrigação, neste caso uma obrigação de sobrevivência, foi emitida em Novembro de 2004, pelo Banco Europeu de Investimento (BEI) – se bem que tenha sido o BNP Paribas a preparar a emissão. O instrumento de dívida pressupunha um prazo de maturidade de 25 anos e um cupão anual de 50 milhões de Libras esterlinas, mas proporcional à evolução de um índice de sobrevivência $S_{x,t}$ (ou seja, baseando-se nos indicadores de sobrevivência dos homens de 65 anos em 2003 em Inglaterra e no País de Gales, em comparação com os mesmos indicadores à data de pagamento de cupão). Este produto já focalizava a cobertura de acordo com um índice de sobrevivência e lidava com os riscos de mortalidade mais comuns, ao contrário do produto anterior, que tinha como objectivo cobrir os riscos de uma catástrofe da mortalidade.

De acordo com Blake *et. al* (2006b), esta obrigação tem todos os pagamentos de cupões em risco, no caso de existir algum “choque” de longevidade. Mais precisamente, a esquematização de pagamentos é directamente proporcional ao índice de sobrevivência:

$$£50M \times S_{x,t}, \text{ para } t = 1, 2, \dots, T = 25.$$

Apesar de as obrigações de sobrevivência serem bons candidatos a cobrir o risco de longevidade, não providenciam uma cobertura perfeita contra as características particulares dos elementos constantes em cada plano de pensões, ou em cada conjunto de adquirentes de anuidades. Neste sentido, existe um risco de base entre a população de referência para a construção do índice e a mortalidade efectivamente experienciada nos membros que adquirem os produtos.

Outros problemas relacionados com a emissão de títulos de sobrevivência incluem em primeiro lugar a capacidade de lidar com um negócio envolvendo grandes montantes de

capital. Em segundo lugar, algumas questões relacionadas com o *pricing* das anuidades, devido à adopção de uma representação estocástica particularmente incerta da mortalidade e a estimativa do preço justo do risco de longevidade.

Em terceiro lugar, outro problema relacionado com a emissão deste tipo de produtos inclui a importância de um design atraente do contrato, com o objectivo de aumentar a liquidez dos produtos negociados e com isso reduzir o risco de crédito. Assim, depois deste tipo de mercado de obrigações estar bem organizado e ser bastante líquido, criam-se as condições necessárias para o desenvolvimento de mais produtos derivados de sobrevivência (por exemplo, opções de mortalidade com base num determinado índice da mortalidade, contratos de futuros com base em previsões de sobrevivência da população e até melhoria dos produtos já existentes como os swaps de sobrevivência ou de outros tipos de *forwards* de longevidade).

Na aplicação prática deste trabalho, são criadas duas obrigações de sobrevivência similares à emitida pelo BEI/BNP Paribas, o que obriga a criar um índice de longevidade, $S_{x,t}$, para a população portuguesa.

Em suma, existem variados métodos alternativos de cobertura de risco de longevidade que incluem o uso de métodos tradicionais de resseguro, tal como vimos no ponto 4.1, ou através de partilha de riscos nos mercados de capitais - que são particularmente atraentes para os investidores devido à baixa correlação negativa.

5. MODELOS DE PREVISÃO DE MORTALIDADE

Este capítulo discute o uso de modelos determinísticos e estocásticos, com o objectivo de prever a distribuição dos resultados de sobrevivência futura para o *pricing* das anuidades e demais produtos, nomeadamente obrigações indexadas a um índice de sobrevivência.

Relativamente aos modelos determinísticos, serão tratados o método de extrapolação e o de tendência.

A modelagem da mortalidade através de um processo estocástico pode ser considerada como um desenvolvimento relativamente recente. Em parte, este desenvolvimento deve-se ao avanço das ferramentas, tanto teóricas como informáticas, necessárias para o tratamento de processos aleatórios, e em parte pelo crescente reconhecimento da incerteza relacionada com a evolução da mortalidade, sendo necessário criar formas de gerir essa incerteza (Pitacco, (2003)).

Nos últimos anos, uma variedade de modelos para a previsão da mortalidade têm sido propostos por diferentes autores, e existe uma literatura vasta (e crescente) sobre o assunto. O trabalho de Lee e Carter (1992) é geralmente considerado o ponto de partida para a adopção mais ampla de modelos estocásticos para a previsão da mortalidade nos campos da demografia e do mercado segurador.

No entanto, pode-se argumentar que o desenvolvimento da modelação de taxas de juro e derivados de crédito nos últimos anos tem facilitado essa investigação.

Este tipo de investigação tem vindo a criar condições para os interessados neste mercado poderem debater soluções e inovações. Exemplos disso incluem a *International Longevity Risk and Capital Markets Solutions Conference*, que já conta com seis edições, sendo uma conferência anual com o objectivo de reunir líderes internacionais da indústria, académicos e decisores políticos para conhecerem e discutirem não só a avaliação do risco de longevidade, mas também os desenvolvimentos dos mercados financeiros e propostas governamentais, com o objectivo de obterem formas de gerir o risco de longevidade através dos mercados financeiros.

O estabelecimento de um mercado para a cobertura do risco de longevidade - o *life market* requer modelos capazes de fazer o *pricing* das anuidades e demais produtos da mortalidade, já concebidos por bancos de investimento. Veja-se, por exemplo, Frederico (2008), onde são propostos métodos de modelação dinâmica da mortalidade e também Ventura (2010), onde é feita a aplicação desta modelação aos mercados financeiros.

Desta forma, podemos dividir os modelos estocásticos de mortalidade em duas grandes categorias. A primeira abordagem é a modelagem da mortalidade baseada nas séries temporais da mortalidade e visa desenvolver modelos que descrevam o fenómeno tão bem quanto possível no sentido estatístico. Inclui-se aqui por exemplo, Lee e Carter (1992) e Cairns *et. al.* (2006a), juntamente com alguns estudos no campo da demografia e estatística (empregando variantes principalmente do modelo Lee-Carter).

A segunda abordagem tem o foco nos aspectos de modelagem matemática, com menor ênfase na validação do modelo estatístico. Assim, torna o *pricing* e a gestão do risco numa perspectiva análoga à dos mercados financeiros derivados. Estes modelos tendem a ser mais simples na sua natureza, mas torna-se possível analisar o potencial de cobertura dinâmica do risco de longevidade (Cairns *et. al.*, 2008a).

5.1 MODELOS DETERMINÍSTICOS

A previsão da mortalidade é feita por demógrafos há vários anos e, desde o seu início, os métodos e os pressupostos utilizados têm variado consideravelmente. Dos modelos determinísticos, destacam-se o método de extrapolação e o de tendência.

5.1.1 MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO

O método de extrapolação foi considerado como o método de previsão da mortalidade mais utilizado ao longo do século XX, através da extrapolação para o futuro de tendências passadas. Usualmente esta era feita por idade, sexo e pela causa adjacente de morte. Assim, estes modelos analisavam a mortalidade num determinado período de tempo, considerado de referência, e daí estimavam as variações que poderiam acontecer no futuro.

5.1.2 MÉTODO DE TENDÊNCIA

Outro dos métodos mais comumente utilizados durante o século XX para previsão da mortalidade é o recurso a taxas de mortalidade que são observadas num grupo ou subgrupo da população ou país, que é considerado como um objectivo para o qual se encaminha um outro subgrupo da população (ou outro país).

5.2 MODELOS ESTOCÁSTICOS DE MORTALIDADE

Num contexto em que a mortalidade se assume como um fenómeno dinâmico, a necessidade de identificar o seu percurso e de projectar com exactidão o seu valor futuro é fulcral, de modo que seja feito um correcto aprovisionamento das responsabilidades financeiras futuras, nomeadamente as dos sistemas de Segurança Social e fundos de pensões. Assim, esta tarefa envolve a utilização de modelos de projecção adequados, que conduzam à construção de tendências de longevidade, também elas, adequadas.

Precisamente por isso abordamos nesta secção dois tipos de modelos estocásticos: Em primeiro, a modelagem da mortalidade baseada nas séries temporais de mortalidade, onde se destacam o clássico modelo de Lee Carter e o modelo de Cairns-Blake-Dowd; E a segunda abordagem que tem um foco nos aspectos de modelagem matemática, com menor ênfase na validação do modelo estatístico. Daqui destacam-se os modelos de curto prazo, *forward*, modelos de mercado e modelos baseados nas taxas de sobrevivência *spot*.

5.2.1 MODELO LEE-CARTER

O modelo de Lee-Carter, desenvolvido por Lee e Carter (1992), é um modelo estocástico, aplicado originalmente para prever taxas de mortalidade nos Estados Unidos da América e tornou-se no método de referência usado por organismos e investigadores na elaboração de projecções da mortalidade para a população. Recentemente, E. Coelho (2001) aplicou o método de Lee-Carter a dados da mortalidade para Portugal.

5.2.1.1 O MODELO

Este modelo assenta na divisão da mortalidade em duas parcelas: um modelo demográfico, específico para cada idade, e um indicador de tendência temporal, sobre o qual são aplicados métodos de séries temporais, de modo a projectar valores futuros para os indicadores da mortalidade.

A equação básica do modelo é definida por uma representação log-bilinear para a taxa de mortalidade $m_{x,t}$, seja

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (5.1)$$

onde:

α_x : representa, para cada idade x , o nível médio das taxas de mortalidade no tempo.

β_x : representa o padrão de oscilação etária nas taxas de mortalidade.

κ_t : descreve as tendências temporais do nível da mortalidade, i.e. o efeito aleatório.

$\varepsilon_{x,t}$: termo aleatório do tipo ruído branco $\varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, de modo a reflectir influências históricas representativas de cada idade, não capturadas pelo modelo.

Segundo Lee e Carter (1992) este modelo é sobre parametrizado, pelas razões em seguida apresentadas. Suponha-se que α_x^*, β_x^* e κ_t^* é uma solução. Então, para qualquer constante c , $\alpha_x^* - \beta_x^* c, \beta_x^*, \kappa_t^* + c$ também deve ser uma solução. Também é claro que se α_x^*, β_x^* e κ_t^* é uma solução, então $\alpha_x^*, \beta_x^* c$ e $\frac{\kappa_t^*}{c} (c \neq 0)$ também é uma solução. Portanto, κ_t é determinado apenas até uma transformação linear, β_x é determinado apenas até uma constante multiplicativa, e α_x é determinada apenas até uma constante aditiva. Assim, para que a Equação (5.1) não seja indeterminada, os autores do modelo adicionam duas restrições, de modo a garantir a obtenção de uma solução única para as estimativas dos parâmetros:

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \beta_x = 1,$$

$$\sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \kappa_t = 0.$$

Em resultado destas restrições o parâmetro α_x é calculado simplesmente pela média de $\ln(m_{x,t})$ no período de observação.

Os parâmetros podem ser estimados a partir dos dados de mortalidade observados, e a obtenção de projecções da mortalidade no modelo Lee Carter decorre da aplicação da metodologia de Box-Jenkins à série temporal dos valores do parâmetro κ_t . Por exemplo, Lee e Carter (1992) recomendam a utilização de um modelo do tipo ARIMA (0,1,0), ou seja, de um modelo de passeio aleatório com tendência constante,

$$\kappa_t = Z(t) + \kappa_{t-1} + u_t, \quad (5.2)$$

onde u_t é um parâmetro que representa a tendência (*drift*) e $Z(t)$ é o ruído estocástico, com $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ i.i.d.

5.2.1.2 ANÁLISE DO MODELO

Uma das principais virtudes do método de Lee Carter, apontada pelos próprios autores, é o facto de este combinar um método demográfico que é simultaneamente rico, mas parcimonioso, com um modelo de séries temporais, o que permite a obtenção de intervalos de confiança para as previsões (sob a hipótese de que os parâmetros são independentes). Por outro lado, a forma como o modelo demográfico subjacente está definido, é suficiente para garantir que as taxas de mortalidade exibem um padrão de decréscimo exponencial, sem necessidade de impor qualquer limite assintótico, arbitrário, ou restrição que delimite os ganhos na esperança de vida. Outra vantagem do método refere-se à possibilidade de obter, de forma indirecta, estimativas nos períodos para os quais não existe informação disponível.

O enorme entusiasmo que este método suscitou após a sua publicação e a sua aplicação em realidades distintas daquelas para a qual foi originalmente concebido, nomeadamente em países com perfis de diminuição da mortalidade distintos do registado nos EUA, permitiram, por um lado, realçar as qualidades da abordagem e, por outro, pôr em destaque as suas limitações. Lee (2000), Lee e Miller (2001), Lee e Tuljapurkar (1994), Brouhns, Denuit e Vermunt (2002), Wong-Fupuy e Haberman (2004), entre outros, procedem a uma avaliação detalhada das potencialidades e limitações do método Lee Carter, da sua performance em termos de previsão e dos melhoramentos possíveis.

O método Lee Carter pertence, desde logo, à categoria dos métodos extrapolativos padecendo, por isso, da sua debilidade fundamental: assume que as tendências históricas se mantêm no futuro e não incorpora elementos de avaliação subjectiva, ao ignorar as implicações de eventuais alterações estruturais (avanços na medicina ou no combate às epidemias, alterações nos hábitos de vida, etc.).

Lee e Carter (1992) demonstram que, à medida que o horizonte de projecção aumenta, as restantes fontes de variabilidade, designadamente os erros na estimação de β_x e os erros de ajustamento do modelo demográfico $\varepsilon_{x,t}$, perdem importância e são dominados pela incerteza relativa a k_t . Por outro lado, têm surgido algumas dúvidas relativamente aos intervalos de previsão reportados por Lee e Carter (1992), considerados demasiadamente estreitos, que levantam dúvidas sobre a capacidade do modelo para incorporar suficientemente a incerteza em relação ao futuro.

Noutro domínio, a forma como o modelo foi ajustado originalmente conduzia a que, nalguns grupos etários, se registasse uma discrepância entre o valor observado para a taxa de mortalidade no último ano considerado na amostra e o primeiro ano de previsão, um aspecto que podia de algum modo distorcer a qualidade da projecção. Este problema foi analisado por Bell (1997), que concluiu que a substituição do parâmetro α_x pelas taxas de mortalidade mais recentes melhorava a qualidade.

Nos últimos anos, foram propostas e implementadas inúmeras extensões a este modelo e de onde resultaram melhorias para especificamente melhorar a previsão da longevidade. Veja-se Lee (2000), Lee e Miller (2001). A possibilidade da correlação imperfeita foi considerada por Renshaw e Haberman (2003), que adicionou ao modelo um segundo factor dependente do tempo. Brouhns, Denuit e Vermunt (2002) melhoraram a abordagem de Lee-Carter ao incorporar no modelo original uma regressão de Poisson para o número de mortos, enquanto Renshaw e Haberman (2006) generalizaram o modelo para incluir um efeito de *cohort*.

Ainda assim, este modelo é sempre o ponto de partida adequado para melhorar todas as fontes de erro nas previsões de sobrevivência, incluindo a variação do processo, erros de parâmetro e erros na má especificação do modelo.

5.2.2 MODELO DE CAIRNS-BLAKE-DOWD

Cairns *et. al.* (2006a) propuseram um modelo (seguidamente referido como CBD) em tempo discreto, onde consideram que os quocientes ${}_tq_x$ evoluem no tempo segundo a

trajectória ditada por dois factores estocásticos e uma relação funcional derivada da lei da mortalidade de Perks (1932).

5.2.2.1 O MODELO

Os autores propuseram este modelo de modo a poder determinar a importância do risco de longevidade em obrigações de sobrevivência com diferentes maturidades e relativas a distintas gerações. Formalmente, temos

$${}_t\hat{q}_x = \frac{e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}}{1 + e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}} \quad (5.3)$$

ou, de igual maneira,

$$\log\left(\frac{{}_t\hat{q}_x}{1 - {}_t\hat{q}_x}\right) = A_1(t+1) + A_2(t+1)(x+t), \quad (5.4)$$

onde:

${}_t\hat{q}_x$: representa a mortalidade realizada para uma pessoa de idade x no momento t .

$A_1(u)$ e $A_2(u)$: são processos estocásticos que se assumem serem medidos num tempo futuro u .

O factor $A_1(u)$ afecta a mortalidade em todas as idades de igual forma enquanto $A_2(u)$ tem um efeito sobre a mortalidade proporcional à idade da pessoa.

5.2.2.1 ANÁLISE DO MODELO

Cairns *et. al.* (2006a) concluem que o modelo proporciona um bom ajuste para os dados de mortalidade dos indivíduos do sexo masculino de Inglaterra e País de Gales, abrangendo os anos de 1961 a 2002.

Assim, apesar da sua relativa simplicidade, o modelo CBD revela um bom desempenho nas previsões conduzidas em Cairns *et al.* (2007, 2008b) e em Dowd *et al.* (2010);

Ambos os estudos concluem que o modelo aparenta ser robusto e biologicamente razoável.

Com efeito, o modelo CBD apresenta algumas virtudes importantes, nomeadamente a facilidade em incorporar parâmetros de incerteza, como se pode verificar em Leppisaari (2009).

Outra vantagem é o facto de se verificar que as taxas de mortalidade logarítmicas são aproximadamente lineares em idades acima dos 40 anos.

Para além disso, o modelo CBD utiliza dois parâmetros para captar a tendência nos melhoramentos de longo prazo nas taxas de mortalidade, (o nível) e também para o diferencial nas idades mais altas (o declive).

Em termos de desvantagens face ao modelo de Lee-Carter, assinala-se o facto deste poder apresentar um melhor ajuste no caso de existirem pequenas não-linearidades na curva de mortalidade, especialmente em idades baixas.

5.2.3 MODELOS DE TEMPO CONTÍNUO

Os modelos considerados nos pontos anteriores são tipicamente reportados de forma agregada e em intervalos discretos (por exemplo, anualmente). Esta situação advém dos dados da mortalidade serem tipicamente publicados em intervalos discretos, sendo por isso comum optar por modelos deste tipo para efectuar as estimações de longevidade.

Ainda assim, é natural considerar a estimação da mortalidade através de processos estocásticos em tempo contínuo, mediante a criação de ferramentas similares àquelas utilizadas nos mercados financeiros. Por isso, vários autores observaram similaridades entre as taxas de juro e a força de mortalidade, μ_x . Veja-se por exemplo Dahl (2004) ou Cairns *et. al.* (2006b).

Apesar de estes modelos não serem aplicados neste trabalho, é ainda assim relevante analisar a tendência em termos de pesquisa acerca da modelação de dados da mortalidade.

Cairns *et. al.* (2006b) identificam quatro enquadramentos possíveis para a modelação da mortalidade em tempo contínuo:

- Modelos de curto prazo – trata-se sobretudo de modelos de curto prazo para a força de mortalidade, μ_x , com uma dimensão (a idade x).
- Modelos *forward* – são os modelos *forward* para a força de mortalidade, $\tilde{\mu}_{(t,T,x+T)}$, com duas dimensões (a idade x e a maturidade T).
- Modelos de mercado – modelos destinados a ajustar as taxas de sobrevivência futuras ou preços de anuidades.
- Modelos positivos da mortalidade – São os modelos usados para o estudo das probabilidades de sobrevivência *spot*.

Detalhada análise destes quatro tipos de modelos pode ser verificada no trabalho supra citado.

6. INCERTEZA NO CONTEXTO DA MODELAÇÃO DA MORTALIDADE

A modelação da mortalidade tem como grande objectivo inferir sobre a mortalidade futura. Nesse sentido, a incerteza no contexto da modelação da mortalidade advém de três fontes principais (Cairns, 2000):

- Em primeiro lugar, devido á incerteza associada à natureza estocástica de um determinado modelo;
- Também advém da incerteza nos resultados dos parâmetros do modelo, visto que os valores dos parâmetros não podem ser estimados com exactidão a partir de conjuntos de dados finitos;
- Finalmente, a incerteza associada à escolha do modelo subjacente, já que os resultados e as decisões a tomar emergem dessa opção.

Como vimos no capítulo anterior, existe em teoria uma vasta escolha de métodos de extrapolação que podem ser seguidos para modelar a mortalidade. Todavia, para que a escolha do modelo seja adequada, devem ser seguidos alguns critérios, bem como deve ser feita a análise da plausibilidade das previsões efectuadas.

6.1.1 CRITÉRIOS PARA SELECÇÃO DE UM MODELO DE MORTALIDADE

A partir do momento em que um modelo tenha sido adoptado e os seus parâmetros sido estimados ou calibrados, torna-se necessário verificar se o modelo extrapola de uma forma aceitável a realidade, i.e., se descreve correctamente a tendência histórica dos dados. A lista seguinte é adoptada directamente das propostas de Cairns *et. al.* (2006b, 2007 e 2008b), embora se trate de puro senso comum:

- As taxas de mortalidade devem ser positivas.
- O modelo deve ser consistente com os dados históricos.
- As previsões feitas pelo modelo no longo prazo devem ser biologicamente razoáveis.
- Os parâmetros estimados e as previsões do modelo devem ser robustos, tendo em consideração a série de dados utilizados, bem como o intervalo de idades empregue.
- Os níveis de previsão da incerteza e as trajectórias das previsões devem ser plausíveis e consistentes com tendências históricas e com a volatilidade nos dados de mortalidade.
- O modelo deve ser simples de implementar, através de métodos analíticos ou algoritmos numéricos relativamente rápidos.
- O modelo deve ser parcimonioso.
- O modelo deve permitir gerar amostras e calcular intervalos de previsão.
- Na estrutura do modelo deve ser possível incorporar um parâmetro de incerteza nas simulações, i.e., pelo menos em alguns países, o modelo deve incorporar um efeito *cohort*.

- O modelo deve ter uma estrutura de correlação significativa.

Como é referido em Cairns *et al.* (2008b), ainda que a plausibilidade seja um conceito subjectivo, as previsões produzidas por alguns modelos podem verificar-se tão irrealistas, à luz dos conhecimentos actuais sobre longevidade, que esses modelos terão que ser excluídos de uma análise para um conjunto de dados em particular. Para uma discussão mais pormenorizada dos pontos acima, vide Cairns *et al.* (2008b).

Com efeito, em algumas situações, é conveniente definir uma idade limite superior para a população considerada. Para os humanos, por exemplo, este limite pode estar no intervalo entre 120 e 130 anos, dadas as observações correntes (veja-se por exemplo Atkinson e Dickson (2000)).

Desta forma, para exista razoabilidade biológica nas previsões, as taxas de mortalidade estimadas para as idades mais avançadas não devem diminuir com o aumento da idade. Daí que, no limite, a razoabilidade biológica seja uma questão de bom senso. Cairns *et al.* (2007), salientam que os peritos na área da mortalidade mantêm certas opiniões subjectivas sobre como a mortalidade pode evoluir no futuro, ou como as taxas de mortalidade em idades diferentes se relacionam entre si e que está longe do pleno acordo.

Desta forma, a plausibilidade das previsões requer mais uma vez bom senso, dada a sua subjectividade, e é discutida por Cairns *et al.* (2008b). São referidos exemplos de modelos onde é feito um ajuste correcto aos dados históricos, mas depois se verifica que as projecções da mortalidade se tornam pouco plausíveis.

Exemplos de previsões pouco plausíveis incluem uma súbita e acentuada mudança na tendência das taxas de mortalidade em determinadas idades; e também a previsão da mortalidade por intervalos que se revelam extremamente largos ou demasiado estreitos.

7. APLICAÇÃO PRÁTICA

A aplicação deste trabalho tem como principal objectivo a estimação dos preços de emissão de duas obrigações de sobrevivência (ou de longevidade), com cupões indexados a dois índices de longevidade, $S_{x,t}$, um para homens e outro para mulheres, que vão ser criados tendo por base os dados de mortalidade da população portuguesa.

Como se viu atrás, a primeira emissão deste tipo de produto, com uma maturidade de 25 anos, foi anunciada em Novembro de 2004 pelo Banco Europeu de Investimento (BEI) e o BNP Paribas. No entanto, no trabalho de Cox, Fairchild e Pedersen (2000), é comentado que um número de seguradoras tem proposto a emissão deste tipo de obrigações desde 1997.

Este capítulo, o mais importante do trabalho, tem a seguinte estrutura: no primeiro ponto é descrita a aplicação e os cash-flows das obrigações de sobrevivência. No segundo, são apresentados e analisados os dados utilizados na criação do índice de longevidade (dados da mortalidade da população portuguesa) e na actualização dos cash-flows da obrigação de sobrevivência (*yield curve*). O ponto seguinte apresenta os resultados da estimação dos parâmetros do modelo de Cairns-Blake-Dowd e finalmente são apresentados os resultados da simulação das taxas de mortalidade, do índice de sobrevivência e do valor actual da obrigação.

7.1 O PROBLEMA

A aplicação simula a criação de dois produtos financeiros, emitidos por um banco de investimento no espaço Europeu.

Os produtos são obrigações de longevidade – uma para o sexo masculino, outra para o sexo feminino e pretende-se determinar qual deve ser o seu preço de emissão. Cada obrigação tem a maturidade de 25 anos e a data de emissão é no dia 31 de Dezembro de 2010 ($t = 0$). As obrigações têm cupões variáveis anuais e o pagamento dos mesmos está indexado a um índice de sobrevivência para cada género, $S_{x,t}$, criado a partir de dados da mortalidade para a população portuguesa masculina e feminina.

Os índices são baseados na mortalidade realizada para indivíduos portugueses com 65 anos em 2010. Desta forma, é feita a apresentação dos cálculos separados por género, porque de acordo com o INE (Estimativas de População Residente aferidas com os resultados definitivos dos Censos 2001), a população residente em Portugal é 48% para os homens e 52% para as mulheres, o que justifica a cobertura do risco de longevidade em separado para ambos os sexos.

Os índices de sobrevivência $S_{x,t}$ são calculados da seguinte forma:

$$S_{x,t+1} = S_{x,t}(1 - {}_t m_x), \quad t = 0, 1, 2, \dots, T = 25 \quad (7.1)$$

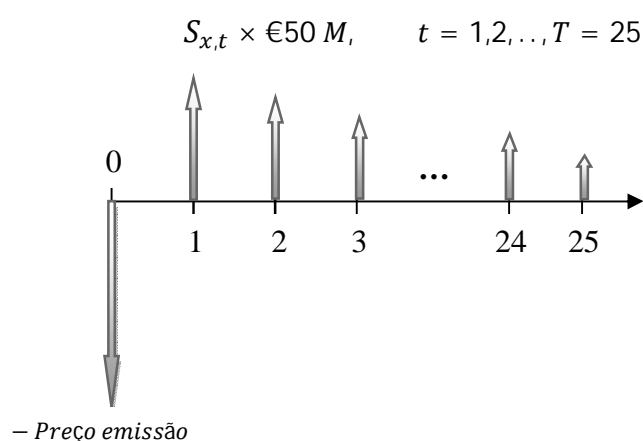
Utilizando como condução inicial $S_{x,0} = 1$.

De modo a que seja criada alguma liquidez no mercado de longevidade em Portugal e por ser um produto pioneiro no nosso país, a cada ano t é efectuado o pagamento do cupão, no valor de $\text{€ } 50 \text{ M} \times S_{x,t}$ para cada uma das obrigações. Desta forma, cada investidor vai receber uma percentagem desse valor, de acordo com a rácio do investimento inicial em relação ao preço de emissão.

Estas condições são similares às seguidas pela obrigação de longevidade emitida em 2004 em conjunto pelo BNP Paribas e o BEI.

Os cash-flows para ambas as obrigações na óptica dos investidores são ilustrados na Figura 7.1.

Figura 7.1 - Estrutura dos pagamentos das Obrigações de Sobrevivência utilizadas na aplicação



Para estimação das taxas de mortalidade ${}_t\hat{q}_x$, é utilizado o modelo CBD, analisado no ponto 5.2.2. Na equação deste modelo, os parâmetros $A_1(u)$ e $A_2(u)$, são processos estocásticos que se assumem mensuráveis num período futuro u , sendo o ajuste destes parâmetros feitos através do método dos mínimos quadrados, como em Cairns *et. al.* (2006a) e também através da maximização da função de verosimilhança, como em Cairns *et. al.* (2007) e em Leppisaari (2009), que desenvolveu um trabalho semelhante para a população da Finlândia.

7.2 DADOS UTILIZADOS NA APLICAÇÃO

Nesta secção, descrevem-se e analisam-se os dados de mortalidade da população portuguesa obtidos para criação dos índices de sobrevivência $S_{x,t}$. Mais ainda, relativamente às obrigações de sobrevivência, pelo facto de estarmos a simular que a entidade emitente é uma empresa Europeia, é descrita a metodologia de cálculo da *yield*

curve data do Banco Central Europeu, para serem efectuados a actualização dos cash-flows das obrigações ao longo dos 25 anos de vida.

7.2.1 BASE DE DADOS DE MORTALIDADE

Os dados de mortalidade nacionais são tipicamente publicados numa base anual e é por isso comum modelar a mortalidade com modelos discretos. Para tal, foram extraídos dados da mortalidade para homens e mulheres em Portugal e foram analisados de forma separada. Os dados foram obtidos da *Human Mortality Database (HMD)*².

Especificamente acerca da população portuguesa, deve-se referir que esta teve uma taxa de crescimento bastante moderada entre 1864 e 1920, com uma taxa de crescimento anual de 0,65%. Já após 1920, houve um aumento acentuado até 1950.

Posteriormente, a população voltou a crescer a taxas moderadas, chegando inclusivamente a diminuir entre 1960 e 1970, como resultado das altas taxas de migração e da guerra colonial. A década de 1970 marcou a maior taxa de crescimento em todo o século, resultantes da combinação dos vários factores, nomeadamente: o retorno de 500.000 cidadãos das colónias Portuguesas; o retorno de um número considerável de emigrantes da França e da Alemanha, e as dificuldades de emigrar devido às políticas de anti-imigração criadas por países que haviam recebido emigrantes portugueses no passado (INE, 2001).

Em 1980, a taxa de crescimento anual foi muito próxima de zero, mas no início da década de 1990, Portugal reverteu uma longa tradição de emigração para se tornar um país de imigração. Na última década do século, um aumento na fertilidade, um forte aumento da imigração e um declínio da emigração originaram um ligeiro aumento da população (Carrilho e Patrício, 2002).

² Base de dados da mortalidade humana; Universidade da Califórnia, Berkeley (E.U.A.) e Instituto para a pesquisa demográfica Max Planck (Alemanha). Dados disponíveis em www.mortality.org. Dados das taxas de mortalidade Portuguesas disponíveis neste site foram obtidos na sua maioria através do Instituto Nacional de Estatística (www.ine.pt)

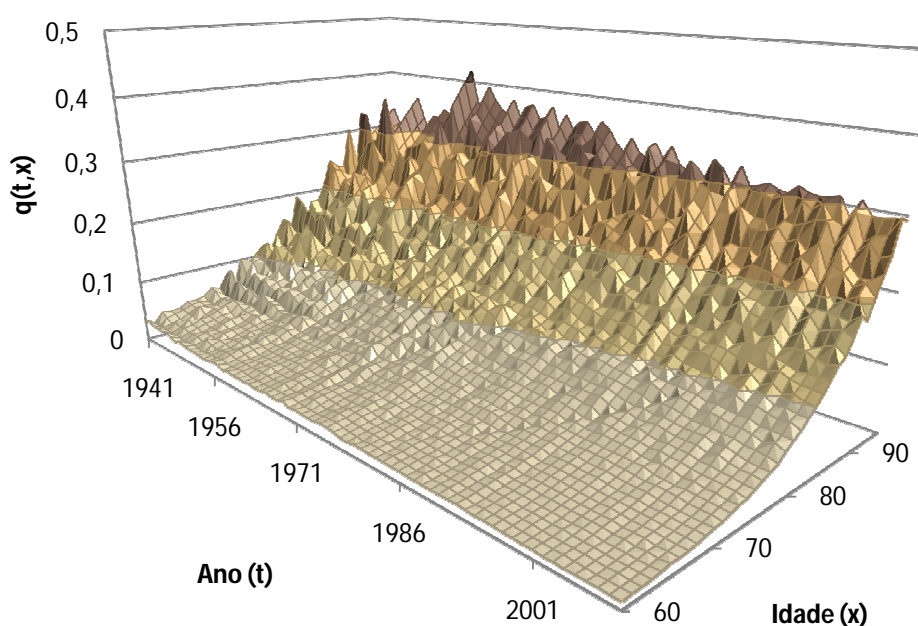
Tendo em conta a estabilidade dos dados e sendo o propósito deste trabalho a previsão das taxas de mortalidade, foram utilizados os dados desde 1941 até 2009 (último ano disponível) e idades que se estendem desde os 60 aos 95 para serem feitas as estimações dos parâmetros para o modelo em causa.

Os dados contêm o número de mortes $D_{(t,x)}$ e a correspondente exposição (i.e., o tamanho da população) $E_{(t,x)}$, dividida por género, idade e ano de calendário t . Estes dados são utilizados para calcular as taxas de mortalidade. As Figuras 7.2 e 7.3 mostram essas taxas para homens e mulheres, respectivamente.

Podemos verificar que as taxas de mortalidade têm vindo a melhorar ao longo do período de observação para ambos os géneros, mas de forma aparentemente aleatória.

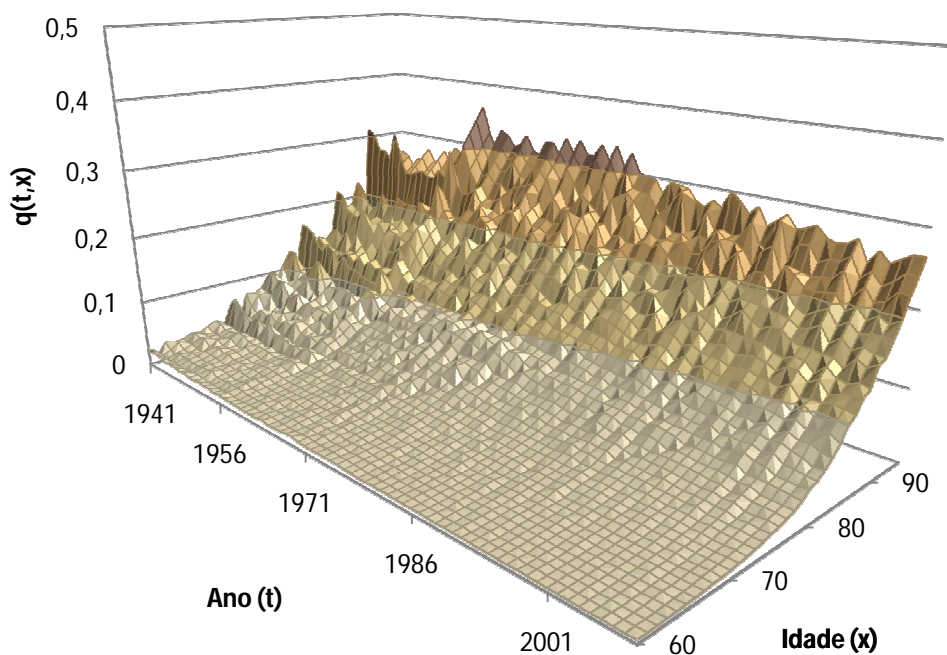
Ao longo do período em estudo, pode verificar-se que nas idades mais avançadas se observa uma diminuição na volatilidade dos dados, já que os picos da mortalidade vão diminuindo. Esta situação é mais latente nas mulheres. Ainda assim, podemos esperar nestas idades algum ruído no modelo ajustado.

Figura 7.2 - Taxas de mortalidade desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 - Homens



Fonte: *Human Mortality Database*

Figura 7.3 - Taxas de mortalidade desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 - Mulheres



Fonte: *Human Mortality Database*

7.2.2 ACTUALIZAÇÃO DE CASH-FLOWS – *YIELD CURVE DATA*

A *yield curve* do Banco Central Europeu representa a relação entre a remuneração de mercado (taxas de juro) e o tempo até o vencimento de um conjunto de títulos de dívida, ou seja, é uma estrutura temporal das taxas de juro.

A informação contida numa *yield curve* reflecte o processo de *pricing* de activos nos mercados financeiros. No momento da compra ou venda de uma obrigação, o investidor inclui as suas expectativas da evolução da inflação, taxas de juro reais e a sua avaliação dos riscos. Nesse momento, o investidor calcula o preço de um título pelo desconto dos fluxos de caixa futuros.

Uma obrigação de cupão zero, como referido no Capítulo 4, é uma obrigação que não paga cupões e é vendida a desconto do seu valor facial. A *yield curve* de cupão zero representa a *yield to maturity* das obrigações de cupão zero, mas muitas delas são hipotéticas, uma vez que não são directamente observáveis no mercado para uma ampla

gama de vencimentos. Portanto, a *yield curve* de cupão zero tem de ser estimada a partir de obrigações de cupão zero existentes e através dos preços de obrigações de cupões fixos ou *yields*.

A estrutura temporal das taxas de juro (*yield curve spot rate*) é estimada diariamente pelo Banco Central Europeu (BCE) para dois conjuntos de obrigações: Primeiro, para títulos de dívida de governos centrais com *rating* “AAA”, ou seja, podem ser considerados livres de risco e utilizados como *benchmark*, uma vez que estes títulos têm uma taxa de *default* muito pequena. Em segundo lugar, é também estimada para títulos de dívida de governos centrais com *rating* “AAA” e *ratings inferiores*³.

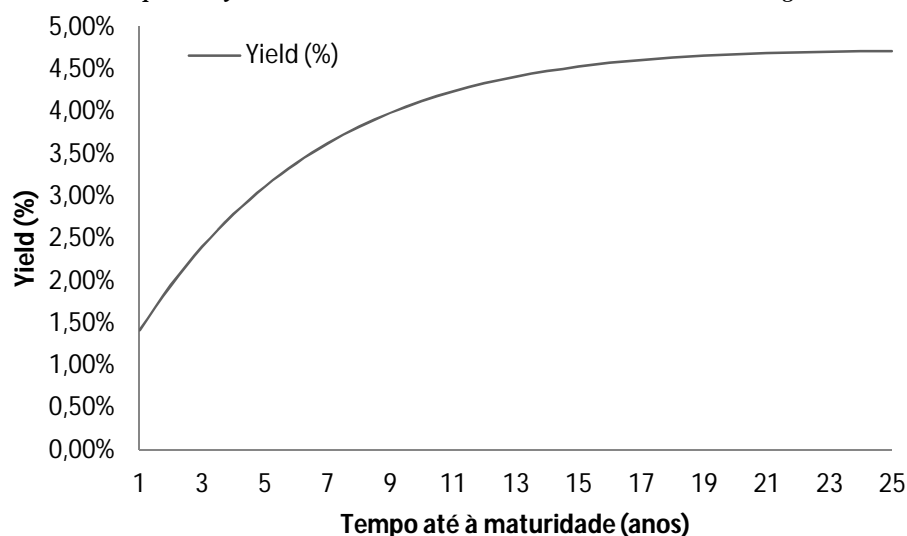
Dado que nesta aplicação, as obrigações em estudo são focadas no mercado português, foi escolhida a *yield curve* do BCE calculada para títulos de dívida com *rating* “AAA” e *inferiores*, para se proceder à actualização dos cash-flows das referidas obrigações. Deve referir-se que os *ratings* utilizados são disponibilizados pela *Fitch*⁴.

A Figura 7.4 apresenta a *spot rate yield curve* estimada no dia 31 de Dezembro de 2010 (data de emissão da obrigação do trabalho) para títulos de dívida com *rating* “AAA” e *inferiores*.

³ Para cálculo da *yield curve spot rate*, são incluídas apenas:

- Obrigações emitidas em Euros pelos governos da zona euro que tenham um *spread bid-ask* máximo de 3 pontos base. Os preços/*yields* são registados diariamente de acordo com o fecho do mercado.
- Obrigações sem quaisquer características específicas, nomeadamente que não incluam quaisquer acordos institucionais;
- Obrigações com cupões fixos e com maturidade finita e também obrigações de cupão zero.

⁴ Fitch Ratings: www.fitchratings.com

Figura 7.4 - BCE *spot rate yield curve* estimada a 31 de Dezembro de 2010 – *Rating “AAA” e inferiores*

Fonte: Banco Central Europeu - *Euro area yield curve*

A inclinação da estrutura temporal das taxas de juro parece ser um indicador útil para avaliar a actividade económica. No caso da Figura 7.4, a curva de rendimentos é considerada normal (Garcia e Simões (2010)), pois a curva apresenta-se com uma configuração crescente e levemente côncava. Com efeito, o funcionamento dos mercados ocorre dentro das condições aceites como regulares, não se esperando alterações significativas a nível das taxas de inflação. Assim, os investidores esperam que os activos de longo prazo com rendimento fixo proporcionem retornos mais elevados do que os de curto prazo.

Constata-se que, para efeitos de política monetária e análise da evolução dos mercados financeiros, os participantes no mercado precisam de representações fiáveis da evolução da estrutura temporal das taxas de juro.

Desta forma, o processo de selecção dos instrumentos financeiros levado a cabo pelo BCE torna a *yield curve* fiável, com taxas de juro ajustadas aos dados disponíveis no mercado e por isso serve muito bem o propósito da actualização dos cash-flows das obrigações utilizadas neste trabalho.

7.3 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DO MODELO DE CAIRNS-BLAKE-DOWD

Já se referiu que o modelo considerado nesta aplicação é o modelo CBD, proposto por Cairns *et. al.* (2006a) e analisado no ponto 5.2.2. Por facilidade de leitura, revisita-se o mesmo nesta secção. Assim, assume-se a seguinte relação para a mortalidade realizada:

$$\log\left(\frac{{}_t\hat{q}_x}{1 - {}_t\hat{q}_x}\right) = A_1(t+1) + A_2(t+1)(x+t), \quad (7.2)$$

ou, de forma equivalente,

$${}_t\hat{q}_x = \frac{e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}}{1 + e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}}. \quad (7.3)$$

Como referido, ${}_t\hat{q}_x$ representa a mortalidade realizada para uma pessoa de idade x no momento t e $A_1(t)$ e $A_2(t)$ são os processos estocásticos que se assumem serem medidos num tempo futuro t .

Os autores apresentam evidência empírica que leva a concluir que estes dois parâmetros são necessários para obter um ajuste satisfatório sobre os dados da mortalidade (ou seja, para garantir que o modelo se adequa às diferentes tendências históricas). Assim, concluem que as previsões resultantes do modelo permitem simular as taxas de sobrevivência e, conseqüentemente modelizar o risco de longevidade. Desta forma, o modelo estocástico CBD providencia um bom ajuste aos dados da mortalidade do Reino Unido e, tendo os autores estabelecido que pode ser utilizado para determinar o preço de instrumentos ligados à mortalidade, daí resulta a motivação para o utilizar neste trabalho sobre a criação das obrigações de sobrevivência sobre a população portuguesa.

7.3.1 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Neste ponto, analisa-se a estimação dos parâmetros do modelo através do ajuste pelo método dos mínimos quadrados (também referido por MMQ). Foram realizadas regressões lineares com recurso ao Excel, utilizando os dados de mortalidade para homens e mulheres, referidos no ponto 7.2.1, desde 1941 até 2009. No Anexo 1, pode verificar-se, a título ilustrativo, alguns dos valores ajustados neste método para $A_1(t)$ e $A_2(t)$.

Verifica-se, em primeiro lugar, que as regressões efectuadas para os processos estocásticos são estatisticamente significativas em todos os anos para ambos os processos estocásticos. As Figuras 7.5 e 7.6 mostram os resultados desse ajuste para homens e mulheres, respectivamente.

Figura 7.5 - Valores estimados para os parâmetros $A_1(t)$ (esquerda) e $A_2(t)$ (direita) para os homens (Método dos Mínimos Quadrados)

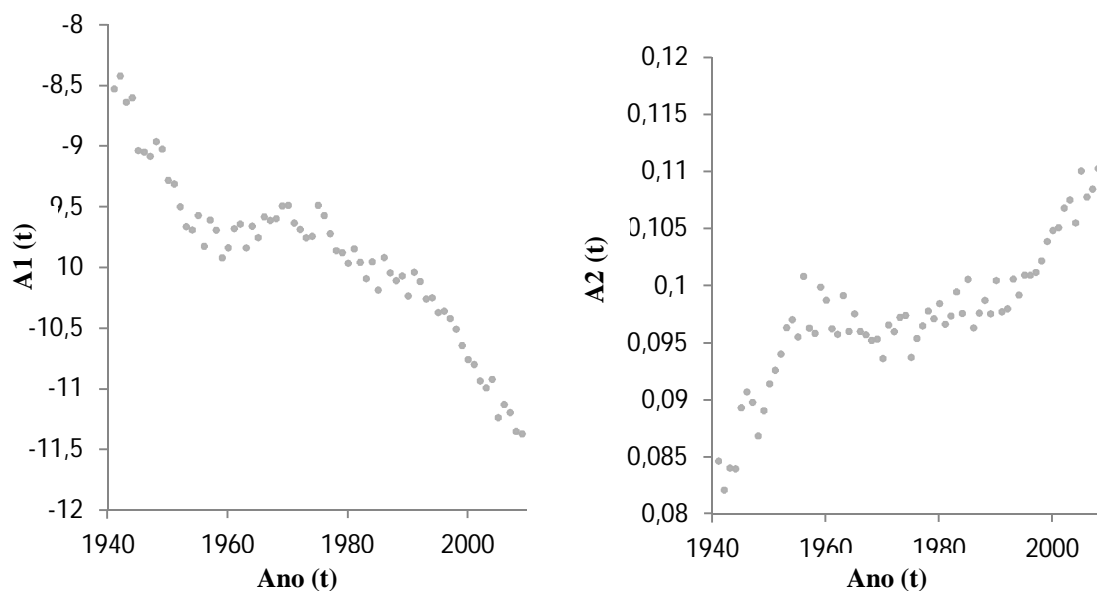
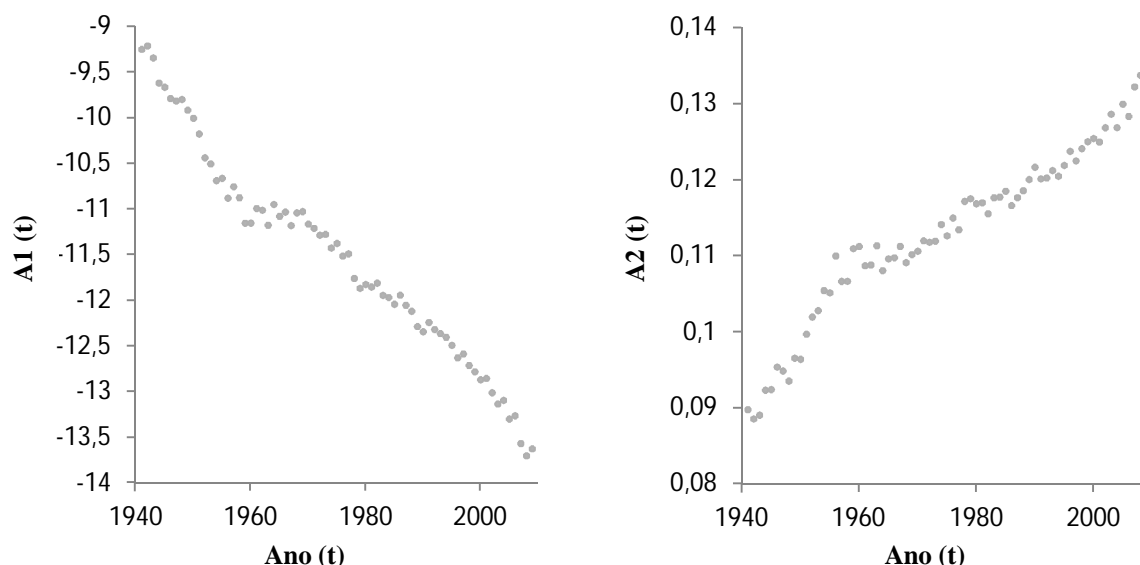


Figura 7.6 - Valores estimados para os parâmetros $A_1(t)$ (esquerda) e $A_2(t)$ (direita) para as mulheres (Método dos Mínimos Quadrados)



Estes resultados mostram uma clara tendência descendente e ascendente nos parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$, respectivamente, similares para ambos os géneros. Cairns *et. al.* (2006a) obtém valores semelhantes utilizando dados de homens de Inglaterra e País de Gales, acima dos 60 anos, com dados entre 1961-2002.

Como os autores assinalam, a tendência decrescente em $A_1(t)$ indica melhoramentos na mortalidade ao longo de todas as idades, enquanto a tendência crescente em $A_2(t)$ demonstra que o declive da curva de mortalidade está a tornar-se íngreme, o que significa que os melhoramentos registados na mortalidade têm sido maiores em idades menos avançadas. Os resultados também sugerem que as tendências em $A_1(t)$ e $A_2(t)$ se tornam íngremes depois de 1965, o que acentua os melhoramentos verificados. Isto é bastante evidente tanto para o sexo masculino bem como para o feminino.

Tendo por base os valores obtidos na estimação de $A_1(t)$ e $A_2(t)$, desde 1941 a 2009, foram aplicados na equação (7.3) de modo a obter as taxas de mortalidade ajustadas, para ambos os sexos.

As Figuras 7.7 e 7.8 comparam as taxas de mortalidade observadas com as taxas de mortalidade ajustadas para o último ano de observação, 2009, para o sexo masculino e

feminino, respectivamente. Estas figuras mostram que o ajuste feito pelo modelo de CBD é muito bom.

Figura 7.7 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 - Homens (Método dos Mínimos Quadrados)

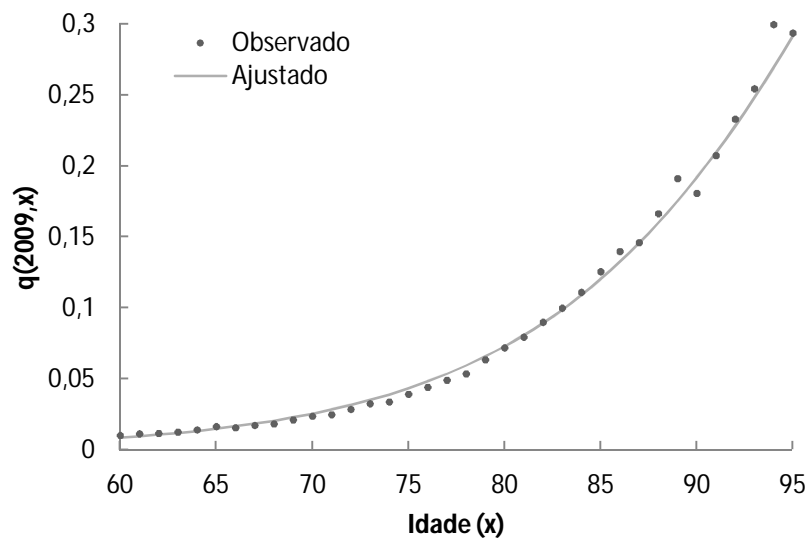
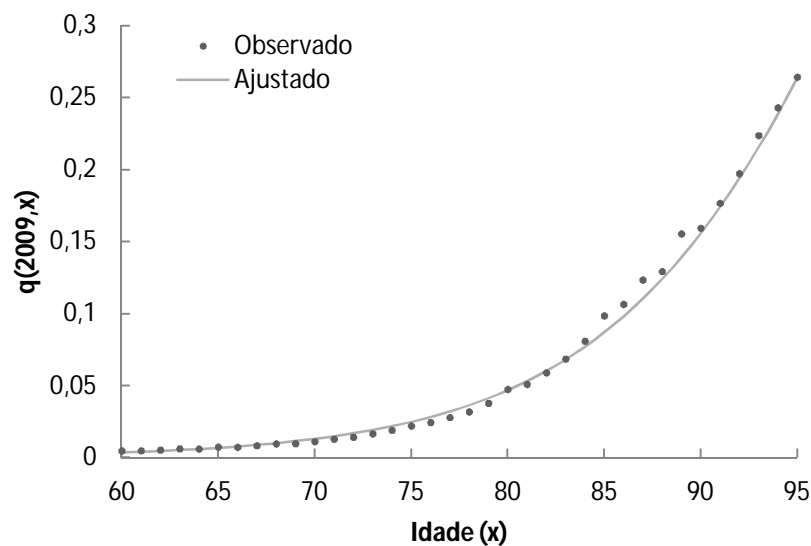


Figura 7.8 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados)



As Figuras 7.9 e 7.10 mostram o resultado do ajuste das taxas de mortalidade para ambos os sexos desde 1941 a 2009. O Anexo 2 mostra-nos alguns dos valores ajustados pelo MMQ para ${}_tq_x$.

Figura 7.9 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 - Homens (Método dos Mínimos Quadrados)

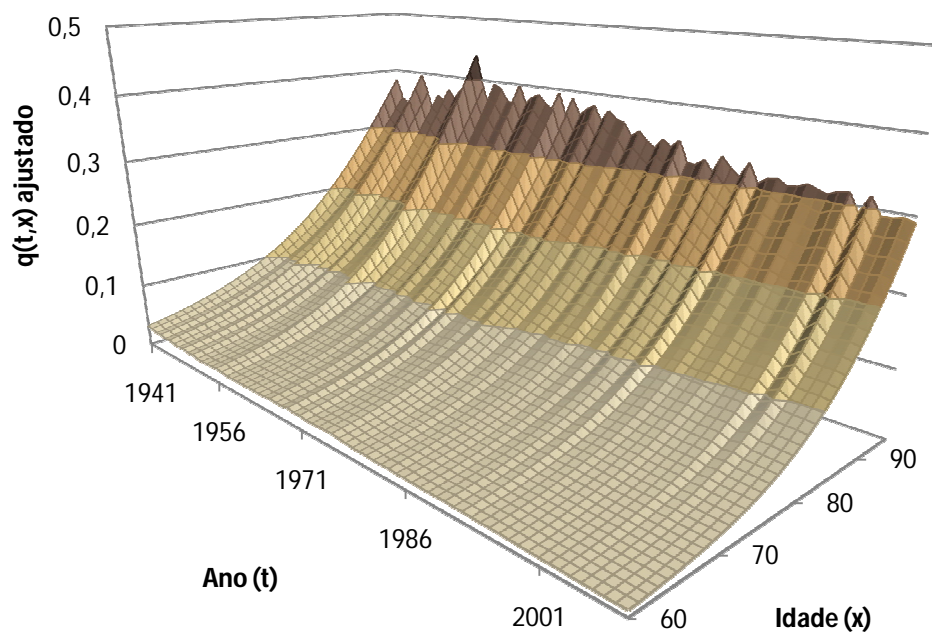
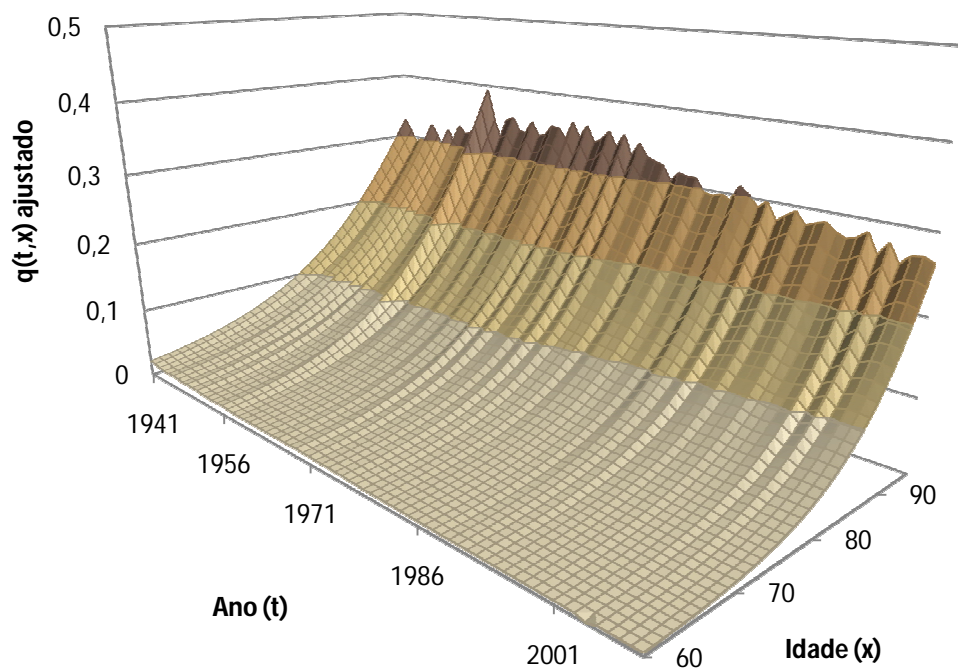


Figura 7.10 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados)



Para efectuar as previsões futuras para a distribuição de $A(t) = (A_1(t), A_2(t))^T$, modela-se $A(t)$ seguindo o mesmo método utilizado por Cairns *et. al.* (2006a), ou seja, através de um passeio aleatório bidimensional com tendência (*drift*).

Especificamente,

$$A(t + 1) = A(t) + \mu + CZ(t + 1) \quad (7.4)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é um vector constante que representa a tendência, $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz triangular inferior constante e $Z(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é um vector independente de variáveis aleatórias normal standard, $Z_i(t) \in N(0,1)$, $i = 1,2$. A matriz de “volatilidade” C é obtida através da matriz de covariâncias $V = CC^T$ utilizando a decomposição de Cholesky. A especificação do passeio aleatório segue o utilizado pelos autores referidos. Utilizando todas as observações, foram estimados os parâmetros para homens:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} -0,0418 \\ 0,00038 \end{pmatrix}, \hat{V} = \begin{pmatrix} 0,019101 & -0,00028 \\ -0,000276 & 0,00000456 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0,13821 & 0 \\ -0,001998 & 0,00076 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

e para as mulheres:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} -0,0644 \\ 0,00063 \end{pmatrix}, \hat{V} = \begin{pmatrix} 0,012205 & -0,00018 \\ -0,000181 & 0,00000324 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0,110478 & 0 \\ -0,001638 & 0,00075 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Estes valores foram obtidos através do eViews tendo por base os parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$, estimados pelo MMQ. Os outputs encontram-se no Anexo 3. A partir destes dados, podemos confirmar algumas da tendências na nossa análise e verificar se são biologicamente razoáveis. Os valores negativos para μ_1 indicam que a mortalidade está a melhorar, ou seja, as taxas de mortalidade estão tendencialmente a decrescer. Já os valores positivos para μ_2 significam que as taxas de mortalidade em idades mais avançadas estão a ter melhorias, mas são inferiores comparativamente com idades mais baixas.

Um critério adicional para a razoabilidade biológica é, para cada ano no futuro, verificar que as taxas de mortalidade para os indivíduos de idades mais avançadas são mais altas, face aos indivíduos de idades mais baixas (isto é, para um t fixo, ${}_t\hat{q}_x$ deve ser uma função crescente de x). Este critério requer que $A_2(t)$ se mantenha positivo. No modelo de CBD, $A_2(t)$ pode teoricamente ser negativo, mas os valores positivos de μ_2 e os valores de $A_2(t)$ no ano de 2009 (0,1103 para os homens e 0,1326 para as mulheres) – valores utilizados para as previsões desta aplicação – torna pouco provável que $A_2(t)$ seja negativo. Assim, a possibilidade de $A_2(t)$ ser negativo tem pouca significância a em termos práticos o modelo utilizado pode ser considerado como satisfatório para uma previsão biologicamente razoável.

Assim, partindo da equação (7.4) e utilizando os valores dos parâmetros $A_1(2009)$ e $A_2(2009)$, do vector $\hat{\mu}$ e da matriz \hat{C} (equações (7.5) e (7.6) para homens e mulheres, respectivamente), efectuaram-se previsões a 25 anos para os parâmetros do modelo, para homens e mulheres. As Figuras 7.11 e 7.12 mostram o resultado das previsões.

Figura 7.11 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Homens (Método dos Mínimos Quadrados)

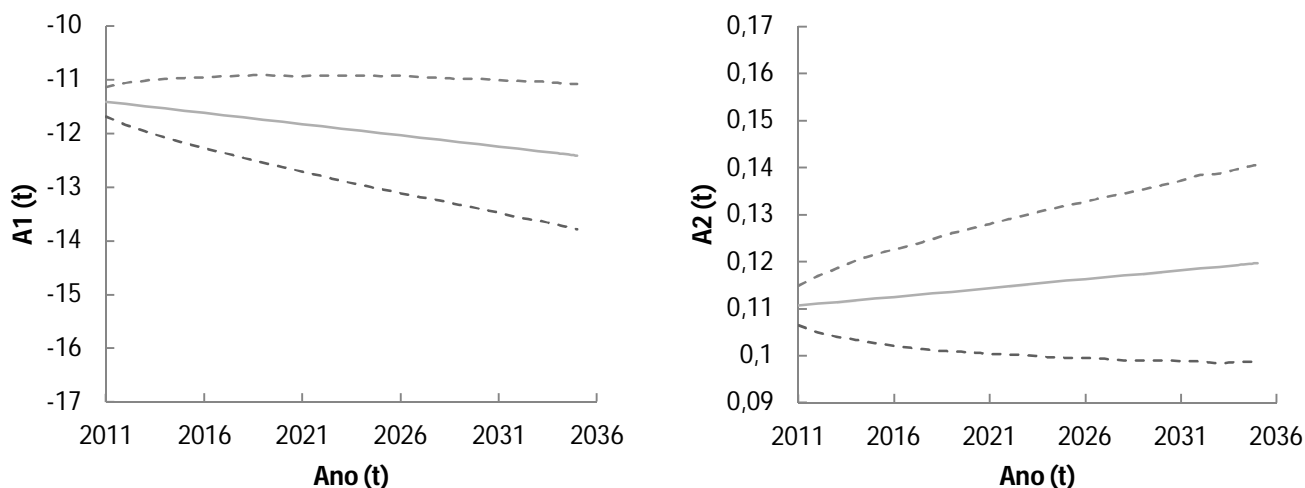
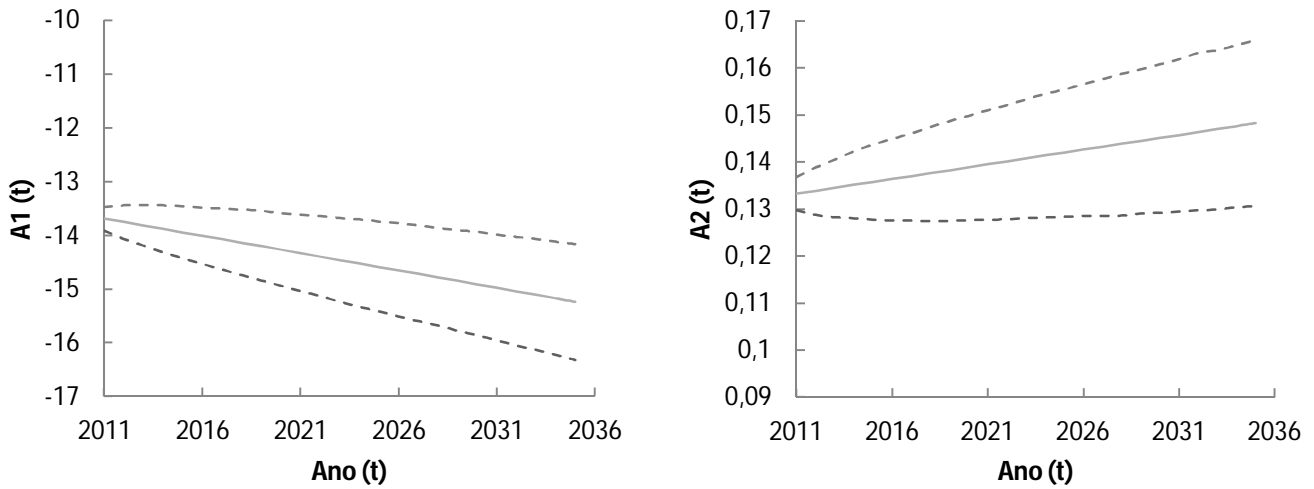


Figura 7.12 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados)



7.3.2 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS PELA FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA

Para cada ano de calendário $t = 1941, \dots, 2009$, são estimados os parâmetros do modelo de CBD utilizando a função de máxima verosimilhança. Assim, assume-se que o número de mortes é modelado através da distribuição de Poisson comumente utilizada na literatura de modelação da mortalidade (vide, por exemplo, Cairns *et. al.* (2007) e Leppisaari (2009)). Assumiu-se por isso que $D_{(t,x)} \sim Po(E_{(t,x)}\mu_{x,t})$.

Visto que a estimação exacta da força de mortalidade $\mu_{x,t}$ é difícil, foram tomados dois pressupostos tipicamente utilizados neste contexto, mas que ainda não foram explicitamente enunciados. Primeiro, dada a parametrização em tempo discreto, assume-se (Denuit, Devolder e Goderniaux, (2007))

$$\mu_{x+,t+s} = \mu_{x,t} \quad \forall s, u \in [0,1]; \quad (7.7)$$

desta forma, a força de mortalidade mantém-se constante ao longo de cada idade x e cada ano de calendário t . Dado este pressuposto, temos que

$${}_tq_x = 1 - \exp[-\mu_{x,t}]. \quad (7.8)$$

Pode ser demonstrado que esta aproximação é muito precisa; veja-se, por exemplo, Thatcher (1999). Numa população numerosa, $\mu_{x+\frac{1}{2},t}$ é também aproximada à taxa de mortalidade para cada idade, baseando o número de mortes entre idades exactas x e $x + 1$; assim, $\mu_{x+\frac{1}{2},t} \approx {}_tm_x$. Assim, com base em (7.7), podemos tomar a seguinte hipótese

$${}_tm_x = \mu_{x,t}. \quad (7.9)$$

Este é o segundo pressuposto normalmente utilizado na análise de taxas de mortalidade, em situações como a presente.

Utilizando as equações (7.8) e (7.9), podemos deduzir

$${}_tm_{x;\theta} = -\log[1 - {}_tq_{x;\theta}], \quad (7.10)$$

sendo $\theta = \{A_1(t), A_2(t)\}$. Assim, o logaritmo da função de máxima verosimilhança vem (Cairns *et al.* (2007)):

$$\begin{aligned} l(\theta; D, E) = & \sum_{t,x} D_{(t,x)} \log[E_{(t,x)} {}_tm_{x;\theta}] - E_{(t,x)} {}_tm_{x;\theta} \\ & - \log[D_{(t,x)}!] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Os parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$ do modelo CBD são estimados através da maximização da expressão (7.11), o que se consegue com apelo ao processo equivalente e habitual de passagem ao logaritmo da função de máxima verosimilhança (também referido como LogMV). A maximização dos parâmetros foi feita através do Matlab.

As estimações dos parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$ são apresentadas nas Figuras 7.13 e 7.14 para homens e mulheres, respectivamente. Veja-se no Anexo 5, a título ilustrativo, alguns dos valores ajustados neste método para $A_1(t)$ e $A_2(t)$.

Figura 7.13 - Valores estimados para os parâmetros $A_1(t)$ (esquerda) e $A_2(t)$ (direita) para os homens (Função de Máxima Verosimilhança)

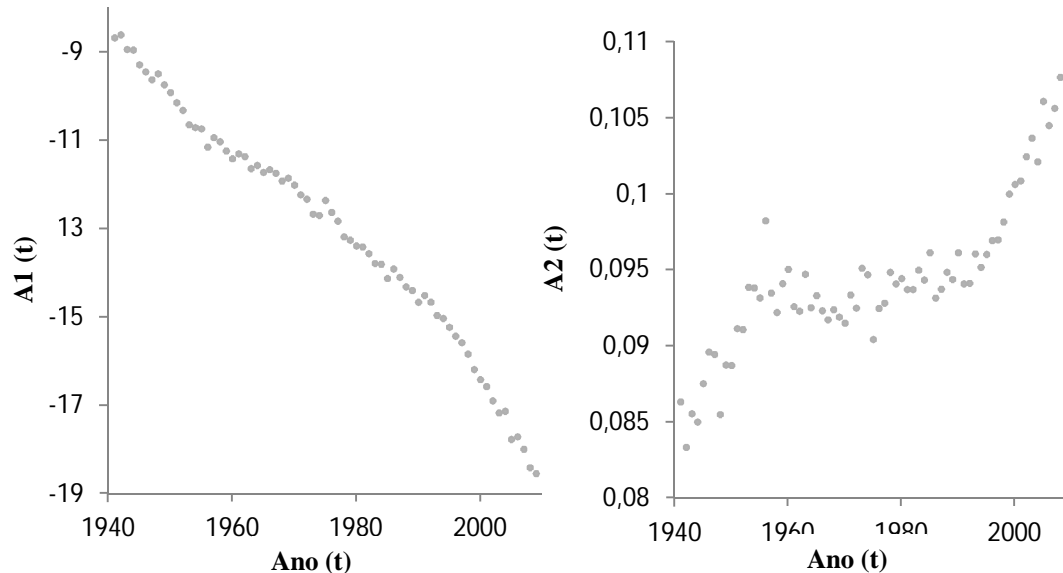
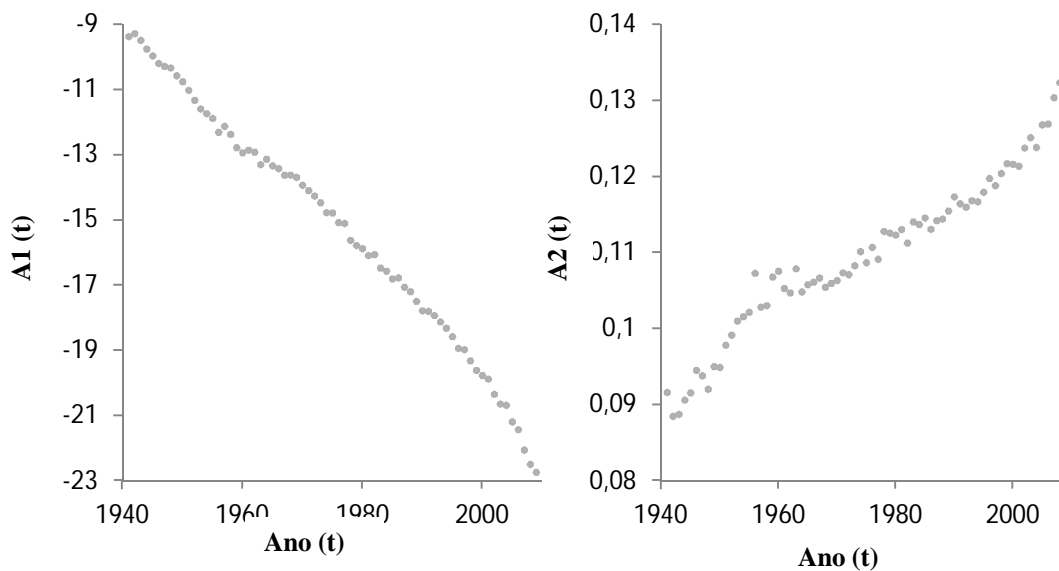


Figura 7.14 - Valores estimados para os parâmetros $A_1(t)$ (esquerda) e $A_2(t)$ (direita) para as mulheres (Função de Máxima Verosimilhança)



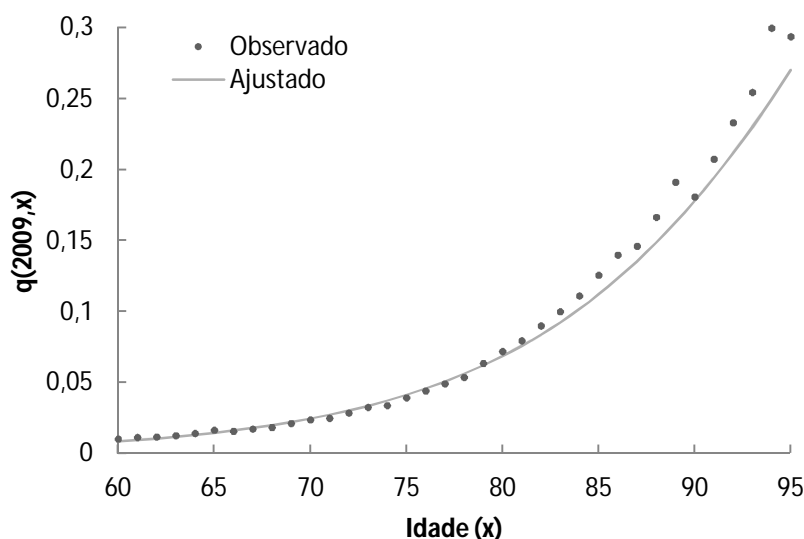
Nas figuras acima, verifica-se que os parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$ apresentam a mesma tendência e significado que os apresentados no modelo de estimação anterior, MMQ: a tendência decrescente em $A_1(t)$ que reflecte melhoramentos na mortalidade ao longo de

todas as idades, e a tendência crescente em $A_2(t)$, que sugere que a mortalidade em idades mais avançadas está a registar melhoramentos inferiores em comparação com idades menos avançadas. Todavia, é notório que o parâmetro $A_1(t)$ revela uma queda mais acentuada pelo modelo do LogMV em comparação com a estimação através do MMQ. Essa situação pode ser verificada pelo valor do parâmetro em 2009, -18,5 e -22,7 para homens e mulheres, respectivamente. Conclui-se que os melhoramentos verificados na mortalidade são substancialmente mais elevados neste método em comparação com o método dos mínimos quadrados. Esta situação requer a confirmação de que os melhoramentos na mortalidade ao longo dos 25 anos não se tornam desfasados da realidade – o ponto 7.3.3 aborda esta questão.

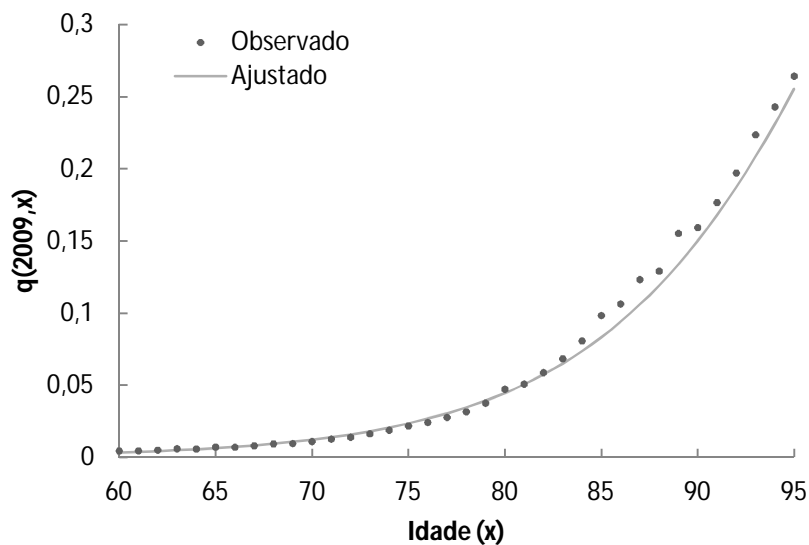
Tendo por base os valores obtidos na estimação de $A_1(t)$ e $A_2(t)$, desde 1941 a 2009, foram aplicados na equação (7.3) de modo a obter as taxas de mortalidade ajustadas, para ambos os sexos.

As Figuras 7.15 e 7.16 comparam as taxas de mortalidade observadas com as taxas de mortalidade ajustadas para o último ano de observação, 2009, para o sexo masculino e feminino, respectivamente.

Figura 7.15 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 – Homens (Função de Máxima Verosimilhança)



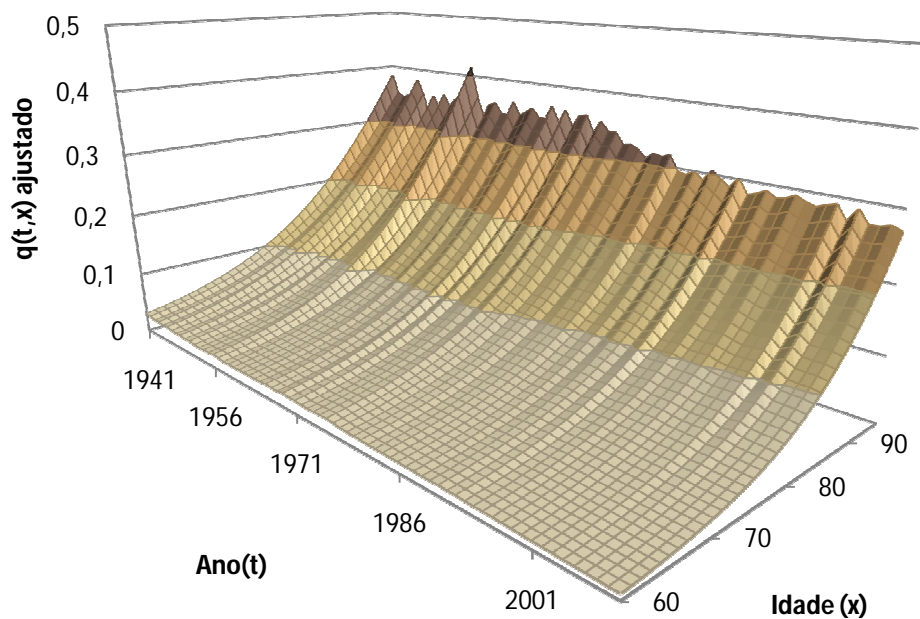
**Figura 7.16 - Taxas de mortalidade observadas e ajustadas em 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres
(Função de Máxima Verosimilhança)**



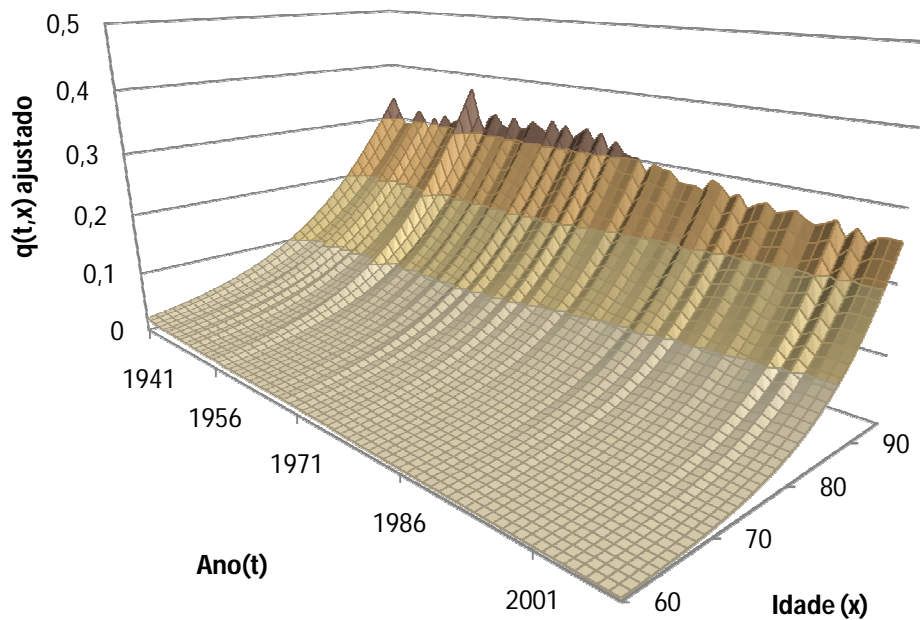
Estas figuras mostram que o ajuste feito pela estimação do logaritmo da função de máxima verosimilhança é adequado, mas revela alguns desvios que não acontecem no MMQ. Tais desvios são particularmente relevantes nos homens e em idades avançadas, especificamente a partir dos 80 anos.

As Figuras 7.17 e 7.18 mostram as taxas de mortalidade ajustadas para ambos os sexos desde 1941 a 2009. Veja-se o Anexo 6, onde são apresentados alguns dos valores para ${}_tq_x$, ajustados através do LogMV.

**Figura 7.17 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 – Homens
(Função de Máxima Verosimilhança)**



**Figura 7.18 - Taxas de mortalidade ajustadas desde 1941 até 2009 para idades dos 60 aos 95 – Mulheres
(Função de Máxima Verosimilhança)**



Em análise aos gráficos, conclui-se que o ajuste de ${}_tq_x$ apresenta valores mais baixos, em comparação com o método dos mínimos quadrados.

Considera-se novamente que, para as previsões futuras para a distribuição de $A(t) = (A_1(t), A_2(t))^T$, se modela $A(t)$ através de um passeio aleatório bidimensional com tendência (*drift*) (Equação 7.4)

$$A(t + 1) = A(t) + \mu + CZ(t + 1)$$

Utilizando todas as observações, foram estimados os parâmetros para homens:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} -0,1451 \\ 0,00031 \end{pmatrix}, \hat{V} = \begin{pmatrix} 0,028709 & -0,00029 \\ -0,00028 & 0,00000347 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0,16944 & 0 \\ -0,001723 & 0,00071 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

e para as mulheres:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} -0,1965 \\ 0,00061 \end{pmatrix}, \hat{V} = \begin{pmatrix} 0,025215 & -0,000253 \\ -0,000253 & 0,00000306 \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 0,158792 & 0 \\ -0,001593 & 0,00072 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Estes valores foram obtidos através do eViews tendo por base os parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$, estimados pelo LogMV. Os outputs encontram-se no Anexo 7. A partir destes resultados, podemos confirmar algumas das tendências na análise, comparar com o método de estimação anterior e verificar se são biologicamente razoáveis. Igualmente, os valores negativos para μ_1 indicam que a mortalidade está a melhorar, ou seja, as taxas estão tendencialmente a decrescer. Já os valores positivos para μ_2 significam que as taxas de mortalidade em idades mais avançadas estão a ter melhorias, mas que estes são inferiores comparativamente com idades mais baixas.

Todavia, verifica-se que os valores de μ_1 são mais baixos do que aqueles calculados através do MMQ, o que significa que a mortalidade melhora mais com a segunda modelação. No mesmo sentido vai o parâmetro μ_2 , já que os valores são mais baixos no modelo LogMV. Esta situação advém do facto dos valores ajustados para $A_2(t)$ serem também mais baixos do que aqueles calculados no método de estimação anterior.

Assim, partindo da equação (7.4) e utilizando os valores dos parâmetros $A_1(2009)$ e $A_2(2009)$, do vector $\hat{\mu}$ e da matriz \hat{C} (equações (7.12) e (7.13) para homens e mulheres, respectivamente), efectuaram-se previsões a 25 anos para os parâmetros do modelo, para homens e mulheres. As Figuras 7.19 e 7.20 mostram o resultado das previsões.

Figura 7.19 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Homens (Função de Máxima Verosimilhança)

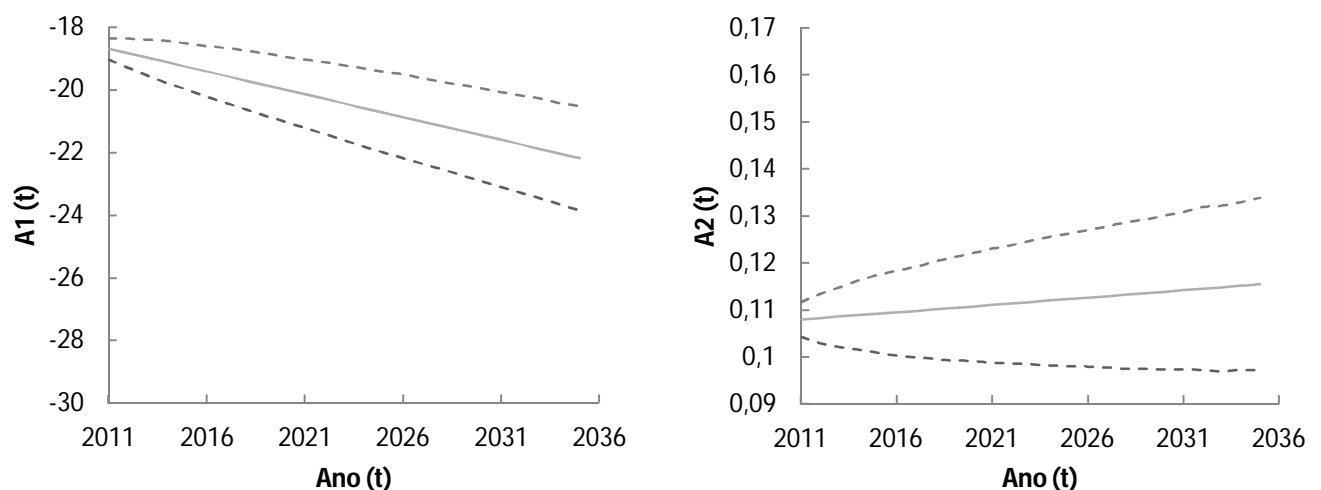
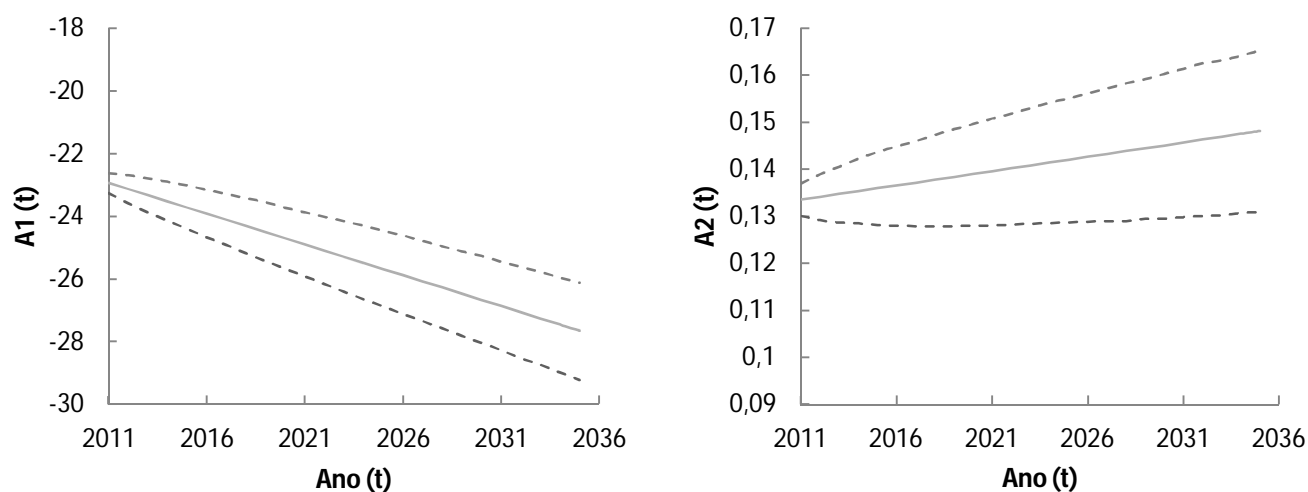


Figura 7.20 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ de 2011 a 2035 – Mulheres (Função de Máxima Verosimilhança)



Verifica-se que o nível de incerteza associado aos dois métodos (cf. Figuras 7.11 e 7.12) é semelhante, na medida em que a evolução dos seus níveis de confiança são idênticos.

7.3.3 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE ESTIMAÇÃO

Tendo por base os resultados obtidos em ambos os métodos de estimação, sintetizam-se algumas das conclusões:

1. Apesar de os parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$ apresentarem tendências crescente e decrescente, respectivamente, para ambos os métodos de estimação (cf. Figuras 7.5 e 7.6 com Figuras 7.13 e 7.14, para homens e mulheres, respectivamente), é notório que o parâmetro $A_1(t)$ revela uma queda mais acentuada no modelo LogMV em comparação com a estimação através do MMQ. Conclui-se que os melhoramentos na mortalidade são substancialmente mais elevados no modelo LogMV em comparação com o modelo primeiramente estimado.
2. O ajuste das taxas de mortalidade, ${}_tq_x$, feito pela estimação da função de máxima verosimilhança é adequado, mas analisando especificamente o ano de 2009, revela alguns desvios que não acontecem no método dos mínimos quadrados (cf. Figuras 7.7 e 7.8 com as Figuras 7.15 e 7.16, para homens e

mulheres, respectivamente). Estes desvios são particularmente relevantes nos homens e em idades avançadas, especificamente a partir dos 80 anos.

3. Analisando a janela de anos em estudo, de 1941 a 2009 (cf. Figuras 7.9 e 7.10 com 7.17 e 7.18, para homens e mulheres, respectivamente), verifica-se que as taxas de mortalidade ajustadas através da estimação da função de máxima verosimilhança são mais baixas ao longo do período em estudo do que as ajustadas através da estimação pelo método dos mínimos quadrados. Esta situação é expectável, dado que o ajuste efectuado no MMQ apresenta valores de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ mais altos. Conclui-se que o ajuste de ${}_tq_x$ pelo LogMV apresenta valores mais baixos em comparação com o MMQ.
4. A modelação de $A(t) = (A_1(t), A_2(t))^T$ é feita para ambos os métodos por um passeio aleatório bidimensional com tendência (cf. Equações 7.5 e 7.6 com 7.12 e 7.13, para homens e mulheres, respectivamente). Apesar dos valores do vector $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ e a matriz C estarem a apresentar resultados que têm o mesmo sinal em ambos os métodos de estimação, conclui-se que os valores de μ_1 são muito mais baixos no modelo do LogMV do que aqueles calculados através do MMQ, o que significa que a mortalidade melhora substancialmente pela função de máxima verosimilhança. No mesmo sentido vai o parâmetro μ_2 , já que os valores também são mais baixos no modelo do LogMV. Esta situação advém do facto dos valores ajustados para $A_2(t)$ serem também mais baixos do que aqueles calculados no método de estimação anterior.

Tal como dito anteriormente, um critério adicional para a razoabilidade biológica é, para cada ano no futuro, verificar que as taxas de mortalidade para os indivíduos de idades mais avançadas são mais altas, face aos indivíduos de idades mais baixas (isto é, para um t fixo, ${}_t\hat{q}_x$ deve ser uma função crescente de x); este critério requer que $A_2(t)$ se mantenha positivo. No modelo de CBD, $A_2(t)$ pode teoricamente ser negativo e tendo em conta que os valores de μ_2 e os valores iniciais de $A_2(t)$ no ano de 2009 no método do LogMV são mais baixos do que o MMQ, torna mais provável que $A_2(t)$ seja negativo. Assim, apesar de essa probabilidade ter pouca significância em ambos os

métodos, conclui-se que a utilização do MMQ é considerada melhor para uma previsão biologicamente razoável.

Tendo em conta as conclusões acima referidas, o método dos mínimos quadrados apresenta resultados mais adequados à realidade do que aqueles estimados pela função de máxima verosimilhança. Esta situação advém do facto de lidarmos com valores decimais e uma pequena variação no ajuste torna o resultado obtido na estimação distorcido da realidade.

A situação descrita acontece com o modelo do LogMV, na medida em que o comportamento das taxas de mortalidade previstas para a população portuguesa para os próximos 25 anos acaba por não se revelar adequado, em comparação com os resultados da estimação pelo MMQ (e que são similares aos obtidos por Cairns *et. al.* (2006a) e por Leppisaari (2009)). Também é possível que, no LogMV, o pressuposto considerado que número de mortes é modelado através da distribuição de Poisson possa levar a um pior ajustamento.

Em consequência, tendo por base estas comparações, para criação do Índice de Sobrevivência a utilizar no ponto 7.4, vão usar-se os resultados obtidos pelo MMQ. As obrigações de longevidade criadas para homens e mulheres são baseadas nas previsões fornecidas por este método.

7.4 SIMULAÇÃO

Feita a comparação dos dois métodos de estimação, vão ser aplicados os resultados do MMQ à previsão para as taxas de mortalidade ${}_t\hat{q}_x$ e ao índice de sobrevivência $S_{x,t}$. Seguem-se os cálculos de actualização dos cash-flows das obrigações de sobrevivência. No final, as conclusões principais.

7.4.1 TAXAS DE MORTALIDADE

Neste pondo, simulam-se previsões para as taxas de mortalidade e as probabilidades de sobrevivência 25 anos no futuro, para homens e mulheres Portugueses com idade $x = 65$ no último ano de observação, 2009 - homens e mulheres foram tratados em separado. Recorreu-se à simulação de Monte Carlo com $N = 10000$ simulações, de modo a obter a distribuição de ${}_t\hat{q}_x$ para cada $\tau = 1, \dots, 25$ (com $t = 2010 + \tau$). Veja-se o Anexo 8, onde são ilustrados, a título exemplificativo, alguns dos valores obtidos para ${}_t\hat{q}_x$.

As Figuras 7.21 e 7.22 mostram o resultado dessa estimação para o sexo masculino e feminino, respectivamente. Como se sabe, na previsão de ${}_t\hat{q}_x$, usou-se os parâmetros do modelo estimado no ponto 7.3.1.

Figura 7.21 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das taxas de mortalidade, ${}_t\hat{q}_x$, de 2011 a 2035 – Homens com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados)

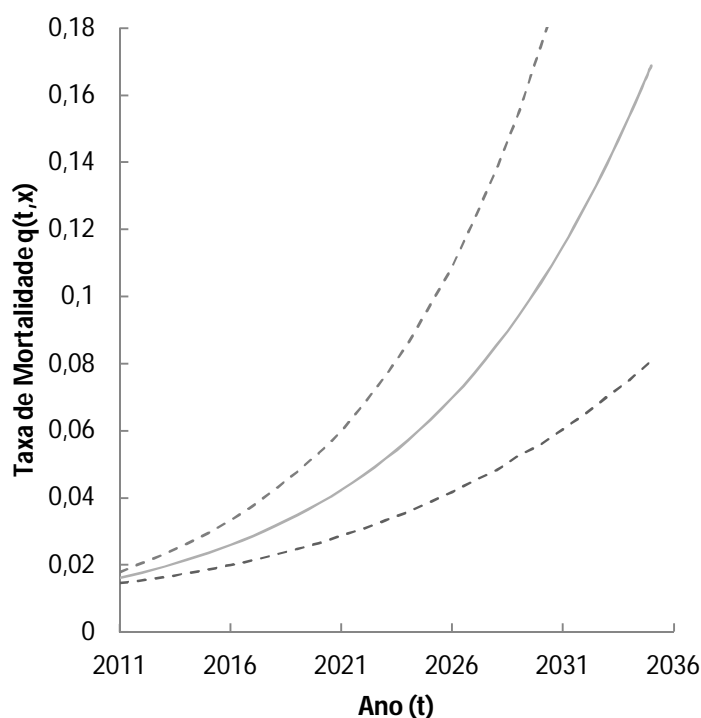
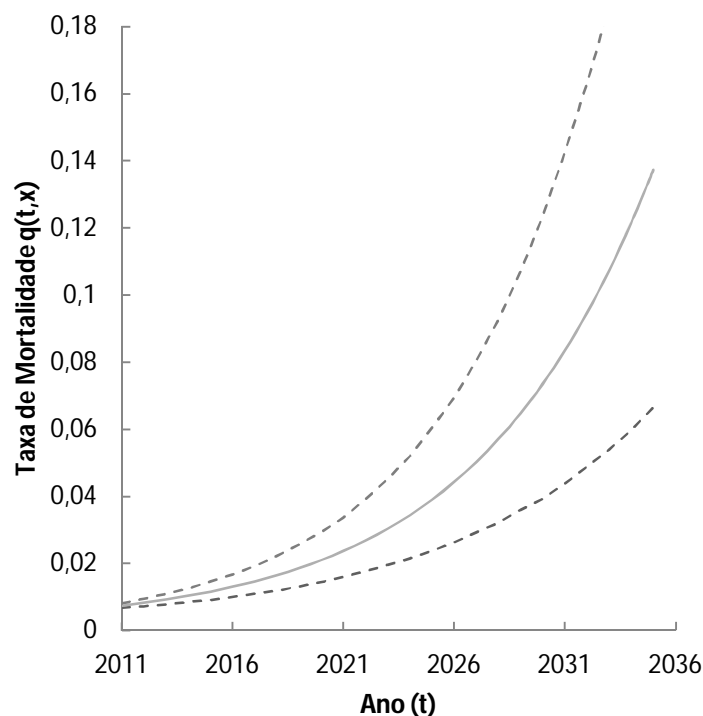


Figura 7.22 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das taxas de mortalidade, ${}_t\hat{q}_x$, de 2011 a 2035 – Mulheres com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados)



Constata-se que os intervalos de confiança aumentam a sua amplitude ao longo dos 25 anos da estimação; esta situação é mais evidente nos homens. Desta forma, quanto maior a volatilidade nos dados da mortalidade, maior a volatilidade nas estimações feitas para os 25 anos. Por sua vez, isto leva a maior incerteza na previsão das taxas de mortalidade futuras. De qualquer forma, é um comportamento habitual nas previsões a longo prazo.

A grande diferença das taxas de mortalidade dos dois géneros advém do número de mortes verificadas no passado e que resultam em maiores taxas de mortalidade para os homens.

7.4.2 ÍNDICE DE SOBREVIVÊNCIA

As obrigações de sobrevivência desta aplicação têm os pagamentos anuais dos cupões indexados à evolução do índice de sobrevivência $S_{x,t}$ que vai ser agora construído.

Assim, partindo dos valores de ${}_t\hat{q}_x$, estimados em 7.4.1, pode definir-se o índice de sobrevivência como especificado na equação (7.1), à semelhança de Cairns *et. al.* (2006b):

$$S_{x,t+1} = S_{x,t}(1 - {}_t\hat{m}_x), \quad t = 0, 1, 2, \dots, T = 25$$

com $S_{x,0} = 1$.

${}_t\hat{m}_x$ representa a taxa de mortalidade central, cuja relação com ${}_t\hat{q}_x$ é dada por

$${}_t\hat{m}_x = \frac{{}_t\hat{q}_x}{1 - \frac{1}{2}{}_t\hat{q}_x}. \quad (7.14)$$

Ainda que a fórmula de ${}_t\hat{q}_x$ seja relativamente simples, a sua distribuição não é directamente tratável e por isso se recorreu à simulação de Monte Carlo (também com $N = 10000$ simulações).

A equação (7.1) é assim utilizada para calcular as probabilidades de sobrevivência $S_{65,t}$ a partir da simulação das taxas de mortalidade anuais ${}_t\hat{q}_x$. As Figuras 7.23 e 7.24 mostram o resultado dessa estimação para homens e mulheres, respectivamente.

Figura 7.23 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das probabilidades de sobrevivência, $S_{x,t}$, de 2011 a 2035 – Homens com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados)

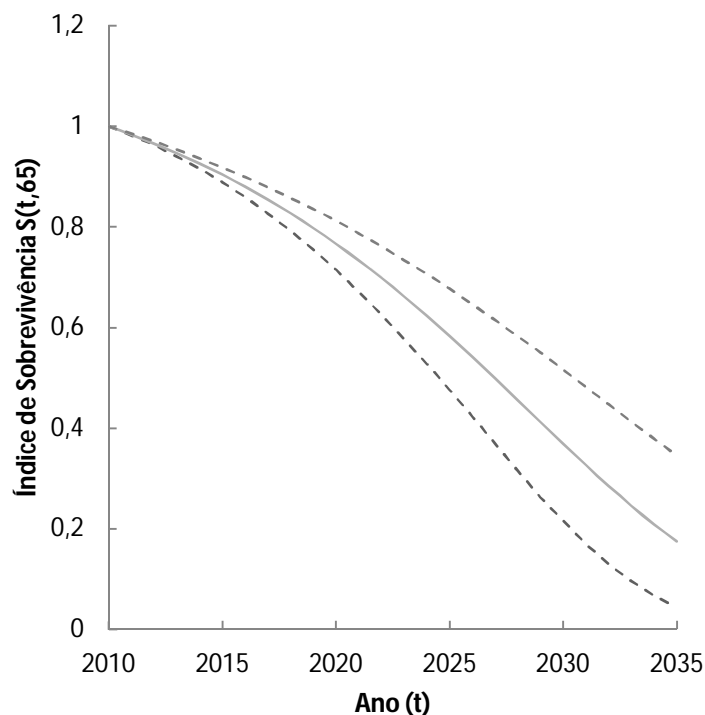
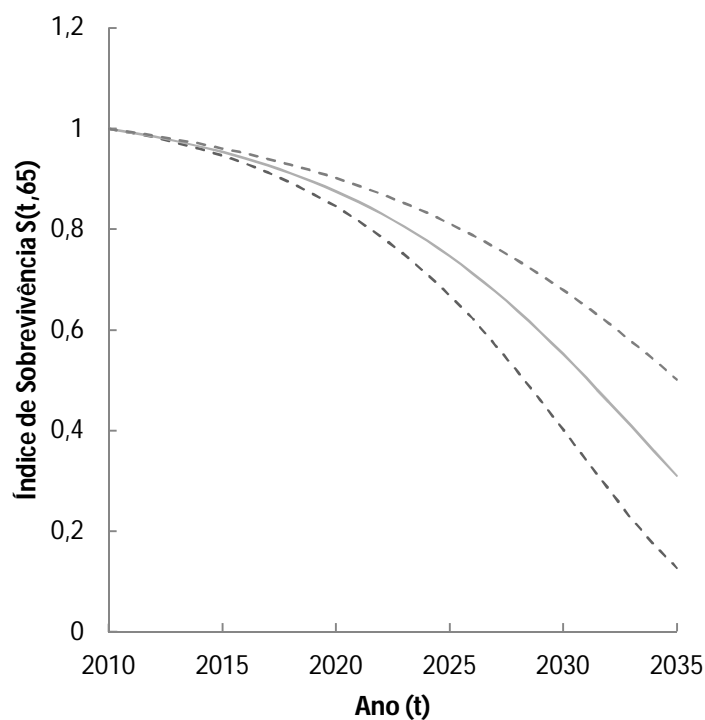


Figura 7.24 - Média (linha sólida) e percentis a 2.5% e 97.5% (linhas a tracejado) para a evolução simulada das probabilidades de sobrevivência, $S_{x,t}$, de 2011 a 2035 – Mulheres com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados)



A linha sólida espelha a média dos valores simulados de $S_{x,t}$, isto é, a média das probabilidades de sobrevivência obtidas nas corridas feitas.

As linhas a tracejado representam os percentis a 2.5% e a 97.5% da distribuição de $S_{x,t}$. Pode ver-se que o intervalo é inicialmente bastante estreito, mas ao longo do horizonte dos 25 anos (maturidade das obrigações utilizadas nesta aplicação), vai alargando, o que é natural.

Na sequência daquilo que foi analisado acerca das taxas de mortalidade, confirma-se que o valor do índice de sobrevivência nas mulheres é mais alto do que nos homens.

As Figuras 7.25 e 7.26 mostram os gráficos da variância do logaritmo de $S_{x,t}$ para homens e mulheres, respectivamente, que permitem aprofundar a análise.

Figura 7.25 - Variância do logaritmo de $S_{x,t}$ de 2011 a 2035 – Homens (Método dos Mínimos Quadrados)

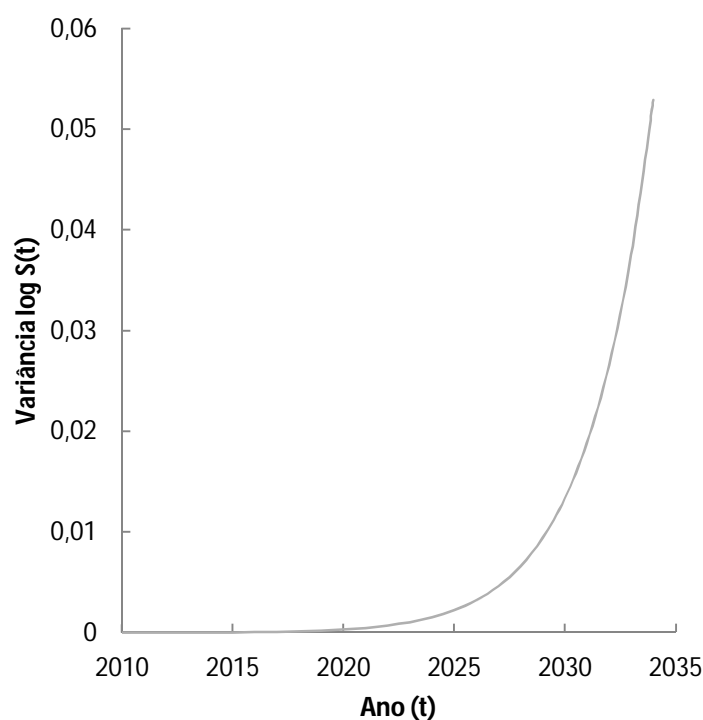
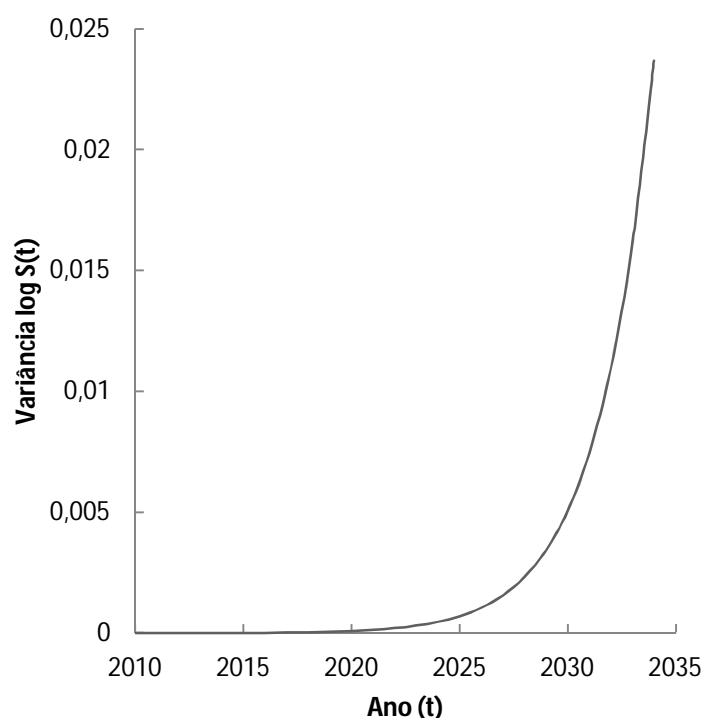


Figura 7.26 - Variância do logaritmo de $S_{x,t}$ de 2011 a 2035 – Mulheres (Método dos Mínimos Quadrados)

Com efeito, pela análise das Figuras 7.25 e 7.26, o índice $S_{x,t}$ apresenta uma variância muito distinta daquela verificada por exemplo no investimento no mercado accionista. O valor é muito baixo nos primeiros anos de previsão, o que significa que se pode prever com relativa precisão as taxas de mortalidade num futuro próximo. Todavia, após os primeiros 10 anos, a variância cresce de forma exponencial. Este tipo de comportamento contrasta com o que se observa no mercado accionista, na medida em que, quando os preços seguem um movimento Browniano, se espera ver na variância um crescimento linearizado, em vez de um crescimento exponencial.

Esta forma de crescimento da variância pode talvez advir do facto de os impactos anuais na mortalidade afectarem as probabilidades de sobrevivência nos anos subsequentes. Os anos mais longínquos estão assim sujeitos a um maior número de impactos.

Adicionalmente, constata-se que existe um maior impacto da mortalidade nos homens, em comparação com as mulheres, dado que a variância no final dos 25 anos de previsão é mais alta.

7.4.3 VALOR ACTUAL DA OBRIGAÇÃO DE LONGEVIDADE

A evolução dos instrumentos nos mercados financeiros para lidar com o risco de longevidade trouxe um número significativo de novas soluções, que estão a chamar a atenção de investidores, *hedgers* e arbitragistas.

Este interesse reflecte a necessidade das várias instituições lidarem com o risco de longevidade e poderem transferir o risco do seu negócio para os mercados financeiros.

Assim, o mercado tem vindo a criar - como vimos ao longo do trabalho - activos ligados à mortalidade, e os quais são utilizados na aplicação.

Neste ponto, é abordada a criação de duas obrigações de longevidade, que têm as características já referidas no ponto 7.1 e que agora se sistematizam:

- Data de emissão: 31 de Dezembro de 2010 ($t = 0$).
- Maturidade: 25 anos.
- Tipos de cupão: Variáveis anuais de € 50 M e com o pagamento desse valor indexado à evolução de um índice de sobrevivência, $S_{x,t}$, para homens e mulheres. O índice foi apresentado em 7.4.2.
- O pagamento dos cupões diminuí ao longo da vida das obrigações, tendo em consideração o número de pessoas com 65 anos no momento $t = 0$ que ainda estão vivas a cada período $t = 1, \dots, 25$. A Figura 7.1 exemplifica a estrutura de pagamentos.
- O objectivo é propor um preço de emissão para cada uma das duas obrigações.

Esta aplicação pretende simular a emissão do activo para o mercado português, sendo a entidade emitente uma instituição financeira do espaço europeu. Para actualização dos cash-flows anuais é utilizada a *yield curve* do Banco Central Europeu, calculada para títulos de dívida com *rating* “AAA” e inferiores.

Nas Figuras 7.27 e 7.28, tem-se o valor dos cupões em cada período t , bem como o respectivo cupão actualizado.

Figura 7.27 - Cupão (linha cinzenta) e Cupão actualizado (linha laranja) da Obrigação de Sobrevivência – Homens

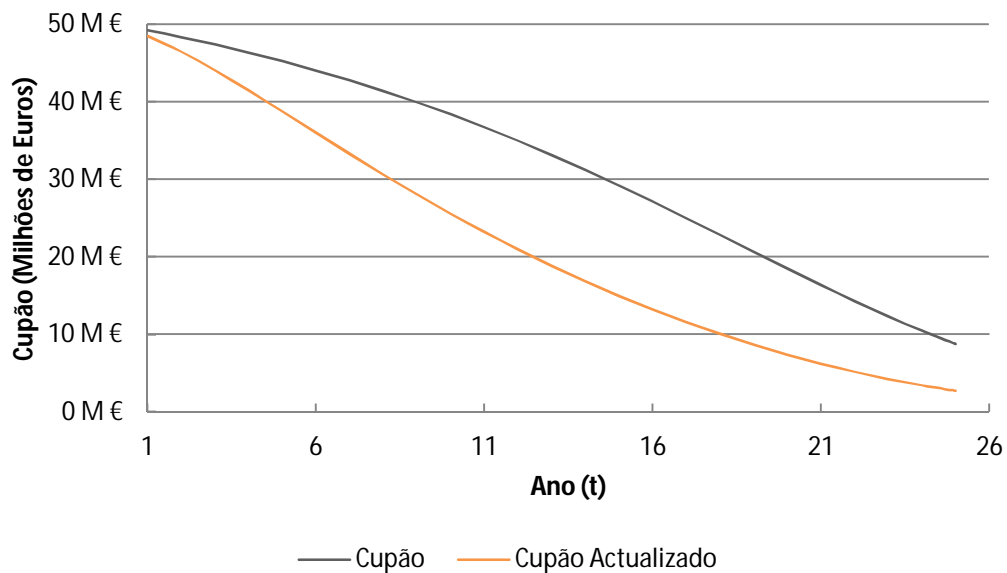
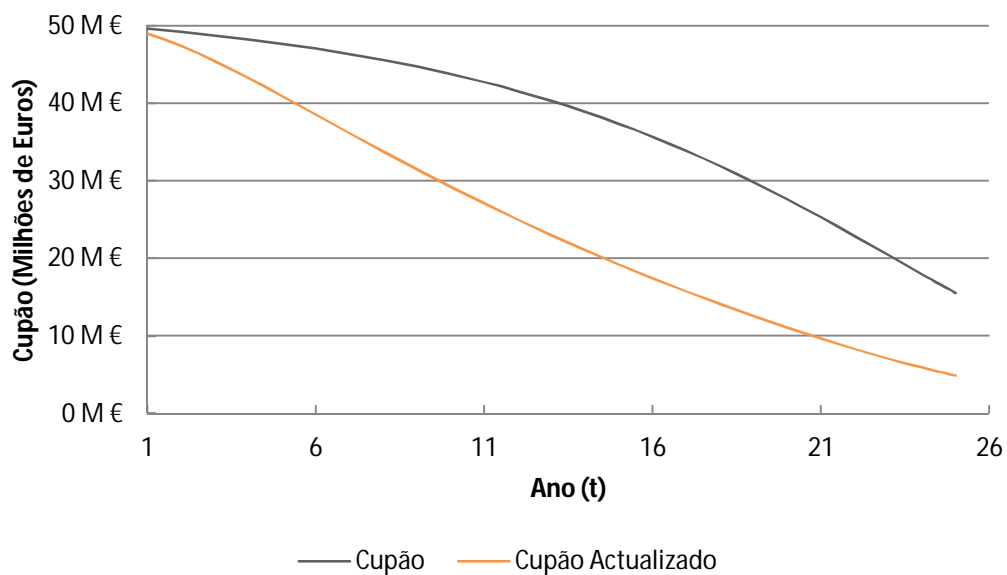


Figura 7.28 - Cupão (linha cinzenta) e Cupão actualizado (linha laranja) da Obrigação de Sobrevivência – Mulheres



Assim, a Tabela 7.1 mostra o preço actualizado das obrigações de sobrevivência, que representam a soma dos cupões actualizados das Figuras 7.27 e 7.28.

Tabela 7.1 - Preço actualizado das Obrigações de Sobrevivência

Preço Actualizado das Obrigações de Sobrevivência	
Género	Valor (Milhões de Euros)
Homens	540,86
Mulheres	616,97

Tendo em consideração que a entidade emitente não pretende incluir qualquer prémio de emissão, a tabela acima mostra os preços de emissão das obrigações de Sobrevivência.

Do ponto de vista da cobertura do risco de longevidade, e em comparação com a obrigação emitida em 2003 pelo EIB/BNP Paribas, conclui-se que ambas as obrigações têm sensivelmente o mesmo preço da emissão (€540,86 M cf. £ 540 M). Note-se que mesmo estando a comparar duas obrigações em unidades monetárias diferentes, estas apresentam o mesmo cupão anual (50 milhões de Euros ou Libras Esterlinas); desta forma, as diferenças entre o preço de emissão é reflectido na estrutura temporal das taxas de juro e no índice de sobrevivência.

Pode também ver-se que o custo de cobertura do risco de longevidade para a população portuguesa do sexo feminino é superior ao custo de cobertura desse risco para a população do sexo masculino, situação evidenciada pelo menor preço actualizado da obrigação dos homens, o que significa que é necessário pagar mais para comprar protecção contra a longevidade das mulheres portuguesas. Esta situação é expectável, pois as mulheres têm vidas mais longas.

Também se conclui pela estrutura que as obrigações estão desenhadas para a cobertura do risco de longevidade para o detentor da obrigação, ou seja, para quem detém a posição longa. Assim, a entidade emitente vai obter um lucro se o índice $S_{x,t}$ for mais baixo que o antecipado (e o comprador lucra se $S_{x,t}$ for mais alto que o previsto).

Por exemplo, as companhias de seguros de vida, relativamente às coberturas em caso de morte, farmacêuticas, empresas de prestação de serviços a idosos e os investidores em imobiliário para idosos saem todos beneficiados com o aumento da esperança de vida; contrariamente os Estados ou empresas privadas que tenham planos de pensões têm prejuízo no caso de aumento da longevidade.

Assim, as obrigações são dirigidas para a cobertura de portefólios compostos na sua grande maioria por anuidades (planos de pensões, por exemplo). Isto porque as obrigações são desenhadas para proteger o comprador contra melhorias inesperadas na mortalidade até à maturidade das obrigações.

Assinalam-se algumas vantagens e limitações a estas obrigações. A primeira vantagem está relacionada com o facto das obrigações de longevidade providenciarem uma cobertura ideal aos portefólios de anuidades sobre a população de referência, que tenham um horizonte de 25 anos (ou seja, o horizonte temporal de pagamento dos cash-flows é coincidente). É discutível o facto do horizonte desta aplicação ser de apenas 25 anos, mas obrigações com prazos ultra-longos podem levantar questões de liquidez ou problemas de cobertura do risco. E, se o mercado responder de forma positiva e mostrar interesse, haverá sempre lugar a mais emissões, com diferentes maturidades, de modo que os *hedgers* possam fazer uma cobertura mais eficaz do risco de longevidade da sua carteira.

Outra vantagem baseia-se no índice de sobrevivência $S_{x,t}$, que é calculado a partir das taxas de mortalidade portuguesas publicadas pelo Instituto Nacional de Estatística. Estas taxas são fidedignas e facilmente acedidas, o que assegura aos investidores que os emitentes das obrigações não podem manipular as taxas de mortalidade obtidas. A utilização de taxas de mortalidade originais evita quaisquer argumentos contra um possível alisamento ou ajuste. Esta é, aliás, a principal contribuição que se procura dar para o tratamento de toda esta complexa questão. Um índice especificamente português, que pode ser comparado com índices semelhantes construídos com dados de outros países.

Outro ponto positivo resulta da redução do risco de base, uma vez que a população coberta pelas anuidades e a população do índice, em princípio, coincidem.

Todavia, existem algumas desvantagens, que justificam porque este mercado ainda não é tão líquido como se desejaria.

Em primeiro lugar, o valor necessário para reduzir a exposição ao risco de longevidade é alto, relativamente à redução de risco que se consegue realizar.

Outro ponto a considerar como desvantagem está ligado ao caso de potenciais *hedgers* verificarem que o risco de base é demasiado alto para o investimento. Esta situação é relevante para um país como Portugal, onde o mercado de anuidades é pequeno e nem todos os extractos da população detêm um plano de poupança reforma ou adquirem anuidades.

O facto de se acreditar que há diferenças entre a mortalidade dos indivíduos que recebem pensões mais altas e a dos que recebem pensões mais baixas (em planos de pensões) é uma limitação. Com efeito, as responsabilidades dos planos de pensões são maiores (ou menores) de acordo com as pensões dos seus constituintes; já nos mercados financeiros, a construção do índice de sobrevivência ignora qualquer ponderação relativamente aos rendimentos, o que leva a que existam diferenças na forma como se cobrem as responsabilidades. No caso prático deste trabalho, os pagamentos dos cupões das obrigações de longevidade dão igual ponderação a todas as vidas da população portuguesa, o que torna a cobertura imperfeita.

Como consequência dos pontos acima referidos, quando um novo instrumento financeiro é desenvolvido, é importante aferir tão bem quanto possível como é que os *hedgers* vão utilizar o produto para reduzir o risco do seu negócio e para isso é necessária a medição do risco de base a que este pode estar sujeito. É necessário que o grau de exposição seja suficientemente pequeno para que se continue a investir no produto, de modo a que não haja problemas de liquidez.

Não obstante as características apelativas das obrigações de longevidade, o mercado ainda não está desenvolvido. Muitos factores contribuem para que isso aconteça, alguns dos quais já referidos. No caso deste tipo de produtos, o desafio mais óbvio tem a ver com a existência de investidores com genuíno interesse na operação e a adequação dos cash-flows das obrigações aos seus portefólios.

Com efeito, as empresas investidoras neste tipo de obrigações têm de fazer a gestão das responsabilidades e activos da sua carteira (ALM⁵) e ponderar as suas necessidades de liquidez por género. Assim, ao analisarem o risco de longevidade a que estão sujeitas, conseguem determinar o montante que vão adquirir destas obrigações para cobrir efectivamente o risco do seu negócio.

⁵ *Asset and Liability management.*

8. IDEIAS FINAIS

As tendências observadas na longevidade têm múltiplas implicações no desenvolvimento económico, social e humano das sociedades. As previsões da mortalidade tornam-se cada vez mais importantes, na medida em que são cruciais para a cobertura do risco de negócio de empresas envolvidas no mercado da longevidade.

A título de exemplo refiram-se as companhias de seguros de vida, as sociedades gestoras de fundos de pensões, e as empresas que os patrocinam, e as próprias empresas da indústria farmacêutica. Os sistemas de segurança social públicos, com as suas múltiplas prestações no apoio à terceira idade (a nível dos rendimentos e dos cuidados de saúde), são também dos principais interessados.

Nunca perdendo de vista que nenhum modelo de previsões é inteiramente preciso, é todavia indiscutível, e há inúmeras provas nesse sentido, que a utilização dos modelos estatísticos adequados permite explorar a informação passada disponível e utilizá-la não só para estabelecer previsões, mas até na quantificação da incerteza, relativamente a essas mesmas previsões.

Neste trabalho, utilizou-se o modelo CBD com dois parâmetros, visando a previsão de uma curva de mortalidade, para um período futuro de 25 anos, considerado relevante. O processo desenvolveu-se em várias etapas, entre as quais se destaca a modelação da evolução dos dois parâmetros por meio de um passeio aleatório bidimensional com tendência (*drift*).

Uma tal opção, que forneceu resultados satisfatórios, apoiou-se naquela que é, por assim dizer, a solução consagrada na literatura vista sobre a modelação da mortalidade em condições análogas. O modelo foi estimado recorrendo a dois métodos alternativos, escolhendo-se então o melhor.

Uma vez escolhido o modelo, foi possível simular a evolução futura do índice de sobrevivência para a população portuguesa masculina e feminina, de modo a incorporar finalmente essas previsões no *pricing* de obrigações de longevidade ou sobrevivência.

Constatou-se que o custo de cobertura do risco de longevidade para a população portuguesa do sexo feminino é superior ao custo de cobertura desse risco para a população do sexo masculino. Esta situação é expectável, pois as mulheres têm vidas mais longas.

Também se verifica que a estrutura destas obrigações está desenhada para a cobertura contra melhorias inesperadas na mortalidade até à maturidade das obrigações, ou seja, para quem detém a posição longa. As obrigações são assim dirigidas para a cobertura de portefólios compostos, na sua grande maioria, por anuidades (planos de pensões).

Consequentemente, trata-se de um produto que constitui uma solução para a cobertura do risco de longevidade em Portugal, o que pode tornar os preços dos produtos das empresas envolvidas neste mercado mais competitivos.

Concluiu-se também, o que é significativo, que os resultados alcançados estão na linha dos obtidos para outras populações, especificamente da Inglaterra e País de Gales e também da Finlândia, o que mostra não só a consistência dos métodos utilizados, mas também que a evolução da mortalidade não é muito diferente neste (pequeno) conjunto de países.

Como ideias para futuros projectos, considera-se estudar se se justifica a inclusão de efeitos *cohort*, de modo a analisar quebras na mortalidade portuguesa provenientes dos fluxos migratórios ou da guerra colonial, por exemplo. É também importante manter os

dados actualizados e ir validando o modelo, à medida que o tempo passa, atendendo à possível necessidade de sucessivas emissões de obrigações.

Uma terceira via é a aplicação dos índices de sobrevivência a outros produtos nos mercados financeiros, como por exemplo Swaps, *q-forwards* ou Futuros (abordados no Capítulo 4), ou inclusivamente idealizar novos produtos para a cobertura do risco de longevidade.

Finalmente, seria certamente muito interessante alargar a análise a outras populações europeias, e até de outros continentes, o que permitiria talvez delinear estratégias de cobertura do risco de longevidade num mercado internacional.

É indiscutível que a modelação do risco de longevidade, e consequente aplicação aos mercados financeiros, é um desafio para financeiros, actuários e empresas. O trabalho desenvolvido, pelas sucessivas solicitações, permitiu a incursão por áreas e técnicas que constituíram igualmente verdadeiros desafios e, ao mesmo tempo, se revelaram genuínas recompensas.

BIBLIOGRAFIA

Alho, J.M. e Spencer, B.D. (2005), *Statistical Demography and Forecasting*, Springer, New York.

Atkinson, M.E. e Dickson D.C.M. (2000), *An Introduction to Actuarial Studies*, Edward Elgard Publishing Limited, Cheltenham, UK.

Bayo, F. e McKay, S.F. (1974), “United States Population Projections for OASDI Cost Estimates”, Social Security Administration, Office of the Actuary, Actuarial study no. 72, Washington.

Bayo, F., Shiman, H.W. e Sobus, B.R. (1978), “United States Population Projections for OASDI Cost Estimates”, Social Security Administration, Office of the Actuary, Actuarial study no. 77, HEW pub. no. (SSA) 78-11523, Washington.

Bell, W. (1997), Comparing and assessing time series methods for forecasting age specific demographic rates, *Journal of Official Statistics*, **13**: 279-303.

Benjamin, B. e Pollard, J. (1980), *The analysis of mortality and other actuarial statistics*, Heinemann, London.

Berry, P., Tsui, L. e Jones, G. (2010), “Our New 'Old' Problem - Pricing Longevity Risk in Australia”, Presentation to the 6th International Longevity Risk and Capital Markets Solutions Conference, Sidney, 2010.

Blake, D. (2003), Reply to Survivor Bonds: A Comment on Blake and Burrows, *Journal of Risk and Insurance*, **70**: 349–351

Blake, D., e Burrows, W. (2001), Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk, *Journal of Risk and Insurance*, **68**: 339-348.

Blake, D., Cairns, A.J.G. e Dowd, K. (2006a), Living with mortality: Longevity bonds and other mortality-linked securities, *British Actuarial Journal*, **12**: 153-197.

Blake, D., Cairns, A.J.G., Dowd, K. e MacMinn, R. (2006b), Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation & Hedging, *Journal of Risk and Insurance*, **73**: 647-72.

Booth, H., Hyndman, R.J., Tickle, L., e de Jong, P., (2006), Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions, *Demographic Research*, **15**: 289-310

Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. e Nesbitt, C. (1986), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.

Bravo, J. M. (2007). “Tábuas de mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade”. Dissertação de Doutoramento em Economia, Universidade de Évora, Portugal.

Bravo, J. M., Corte-Real, P. e Pereira da Silva, C. (2009), “Participating life annuities incorporating longevity risk sharing arrangements”, Paper preparado para submissão ao concurso científico “Prémio Inovação Reforma - Programa Consciência Leve”, Portugal.

Brouhns, N., Denuit, M. e Vermunt, J.K. (2002), A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables, *Insurance: Mathematics and Economics*, **31(3)**: 373-393.

Brown, J. R. e Orszag, P. R. (2006), The Political Economy of Government Issued Longevity Bonds, *Journal of Risk and Insurance*, **73**(4): 611-631.

Cairns, A.J.G. (2000), A discussion of parameter and model uncertainty in insurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**: 313–330.

Cairns, A.J.G., Blake, D. e Dowd, K. (2006a), A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty, *The Journal of Risk and Insurance*, **73**(4): 687-718.

Cairns, A.J.G., Blake, D. e Dowd, K. (2006b), Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk, *ASTIN Bulletin*, **36**: 79-120.

Cairns, A.J.G., Blake, D. e Dowd, K. (2008a), Modelling and Management of Mortality Risk: A Review, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2–3**: 79–113.

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D. e Khalaf-Allah, M. (2008b), “Mortality Density Forecasts: an Analysis of Six Stochastic Mortality Models”, Working Paper, Heriot-Watt University and Pensions Institute Discussion Paper PI-0801.

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., e Balevich, I. (2007), “A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States”, Working Paper, Heriot-Watt University and Pensions Institute Discussion Paper PI-0701.

Carrilho, M.J. e Patrício, L. (2002). A Situação Demográfica Recente em Portugal, *Revista de Estudos Demográficos*, Nº **32**, INE, Lisboa.

Carrilho, M.J. e Patrício, L. (2009). A Situação Demográfica Recente em Portugal, *Revista de Estudos Demográficos*, Nº **48**, INE, Lisboa.

Coelho, Edviges (2001), “O Método de Lee-Carter para a Modelização e Previsão da Mortalidade”, Dissertação de Mestrado em Estatística e Gestão de Informação, Lisboa, ISEGI.

Cox, S.H., Fairchild, J.R. e Pedersen, H.W. (2000), Economic aspects of securitization of risk, *ASTIN Bulletin*, **30**: 157-193.

Cutler, D. e Meara, E. (2001), “Changes in the age distribution of mortality over the 20th century”, NBER Working Paper N. ° 8556, NBER.

Dahl, M. (2004), Stochastic mortality in life insurance: Market reserves and mortality-linked insurance contracts, *Insurance: Mathematics and Economics*, **35**: 113-136.

Denuit, M., Devolder, P., and Goderniaux, A.C. (2007), Securitization of Longevity Risk: Pricing Survival Bonds with Wang Transform in the Lee-Carter Framework, *The Journal of Risk and Insurance*, **74**(1): 87-113.

Dias, E. M. (2006), “Princípios e aplicações a uma carteira de seguros do ramo vida”, Tese de mestrado, ISEG, Portugal.

Dowd K., Cairns A.J.G., Blake D., Coughlan G.D., Epstein D., Khalaf-Allah, M. (2010), Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models, *Insurance: Mathematics and Economics*, **47** (3): 255-265.

Dowd, K. (2003), Survivor Bonds: A Comment on Blake and Burrows, *Journal of Risk and Insurance*, **70**: 339-348.

Eurostat (2009), “Statistics in Focus – Population and Social Conditions”, Luxemburgo.

Frederico, S. (2008), “Metodologia estocástica de avaliação dos requisitos de capital & modelização dinâmica da mortalidade (Seguros de vida) ”, Relatório de estágio Instituto de Seguros de Portugal/ISEG, Portugal.

Garcia, J.A e Simões, O. A. (2010), *Matemática actuarial: vida e pensões*, Económicas, 2ª Série, Portugal.

Garcia, M.T.M. (2003), *Economia e Gestão dos Fundos de Pensões*, Vida Económica, Portugal.

Garcia, M.T.M. (2001). “Reforma e fundos de pensões – Comportamento de Investimento e Gestão do Risco das Sociedades Gestoras de Fundos de Pensões”, Tese de Doutoramento, ISEG, Portugal.

Instituto Nacional de Estatística (2001) “Estatísticas históricas portuguesas”, Coordinator: Nuno Valério, Lisboa, Portugal: Instituto Nacional de Estatística.

Keyfitz, N. (1982), Choice of function for mortality analysis: effective forecasting depends on a minimum parameter representation, *Theoretical Population Biology*, **21**: 329-352.

Leppisaari, M. (2009), “Stochastic Modelling of Mortality Using Finish Data”, Master’s thesis, Helsinki University of Technology, Finland.

Lee, R. D. e Tuljapurkar, S. (1994), Stochastic population forecasts for the United States: Beyond high, medium, and low, *Journal of the American Statistical Association*, **89**: 1175–1189.

Lee, R. D. (2000), The Lee-Carter model for forecasting mortality, with various extensions and applications, *North American Actuarial Journal*, **4**: 80–93.

Lee, R. D., e Carter, L. R. (1992), Modeling and forecasting the time series of U.S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, **38**: 659–671.

Lee, R. D., e Miller, T. (2001), Estimating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality, *Demography*, **38**: 537–549.

Lin, Y. e Cox, S. (2005), Securitization of mortality risks in life annuities, *The Journal of Risk and Insurance*, **72**, 227-252.

Loeys, J., Panigirtzoglou, N. e Ribeiro, R.M. (2007), “Longevity: A market in the making”, JPMorgan Research Publication: London, July 2, 2007.

MacMinn, R., e Richter, A. (2004), “Hedging Brevity Risk with Mortality-Based Securities”, Normal, Illinois State University.

Manton, K.G., Patrick, C. e Stallard, E. (1980), Mortality Model Based on Delays in Progression of Chronic Diseases: Alternative to Cause Elimination Model, *Public Health Reports*, **95**: 580-88.

Myers, R. J. e Rasor, E.A. (1952), “Illustrative United States Population Projections, 1952”, Social Security Administration, Office of the Actuary, Actuarial study no. 33. Washington.

Ngai, A. e Sherris, M. (2010). “Longevity risk management for life and variable annuities: Effectiveness of static hedging using longevity bonds and derivatives”, University of New South Wales, Australian School of Business Research Paper No. 2010ACTL03, April.

Olivieri, A. (2001), Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective, *Insurance: Mathematics & Economics*, **29**: 231-245.

Perks, W. (1932), On Some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics, *Journal of the Institute of Actuaries*, **63**: 12-57.

Pitacco, E. (2003), “Survival Models in Actuarial Mathematics: From Halley to Longevity Risk”, Invited lecture, 7th International Congress Insurance: Mathematics & Economics, ISFA, Lyon, June 2003.

Pollard, J. (1987), Projection of age-specific mortality rate, *Population Bulletin of the United Nations*, **21/22**, 55-69.

Renshaw, A.E. e Haberman, S. (2003), Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement, *Insurance: Mathematics and Economics*, **33(2)**, 255–272.

Renshaw, A.E., e Haberman, S. (2006), A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**: 556–570.

Siegel, J., e M. Davidson. (1984), Demographic and Socioeconomic Aspects of Aging in the United States, *Current Population Reports*, series P-23, No. **138**.

Thatcher, A.R., 1999, The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **162**: 5–43.

UK Pensions Commission (2005), “A New Pensions Settlement for the Twenty-First Century”, The Stationary Office, Norwich.

Ventura, A. C. A. (2010), “Tratamento dos mecanismos de mitigação de risco através da transferência de riscos de seguros para o mercado financeiro”, Tese de mestrado, ISEG, Portugal.

Whelpton, P.K. (1928), Population of the United States, 1925 to 1975, *American Journal of Sociology*, **34**: 253-70.

Whelpton, P.K., Eldridge, H.T. e Siegel, J.S. (1947), “Forecasts of the Population of the United States, 1945-1975”, U.S. Bureau of the Census, Washington.

Willeits, R.C. (2004), The cohort effect: Insights and explanations, *British Actuarial Journal*, **10**: 833–877.

Wong-Fupuy, C., e Haberman, S. (2004), Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the United Kingdom and the United States, *North American Actuarial Journal*, **8**: 56–83.

ANEXOS

ANEXO 1 – ALGUNS DOS VALORES ESTIMADOS PARA OS PARÂMETROS $A_1(t)$ E $A_2(t)$ (MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS)

Valores ajustados para A1 e A2 (Método dos Mínimos Quadrados) – 1941, 1976 e 2009				
Género	Homens		Mulheres	
Parâmetro	A1	A2	A1	A2
1941	-8,5274	0,0847	-9,2510	0,0897
1976	-9,5707	0,0954	-11,5154	0,1149
2009	-11,3697	0,1103	-13,6268	0,1326

ANEXO 2 – ALGUMAS DAS TAXAS DE MORTALIDADE AJUSTADAS PARA IDADES DOS 60 AOS 95 ANOS (MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS)

Taxas de mortalidade ajustadas para A1 e A2 (Método dos Mínimos Quadrados) – 1941, 1976 e 2009						
Género	Homens			Mulheres		
Ano	1941	1976	2009	1941	1976	2009
60	0,0309	0,0209	0,0086	0,0205	0,0098	0,0034
61	0,0335	0,0230	0,0096	0,0224	0,0109	0,0039
62	0,0363	0,0252	0,0107	0,0244	0,0123	0,0045
63	0,0394	0,0277	0,0119	0,0267	0,0137	0,0051
64	0,0428	0,0304	0,0133	0,0291	0,0154	0,0058
65	0,0464	0,0333	0,0148	0,0317	0,0172	0,0066
66	0,0502	0,0365	0,0165	0,0346	0,0193	0,0076
67	0,0544	0,0400	0,0184	0,0378	0,0216	0,0086
68	0,0590	0,0439	0,0205	0,0412	0,0241	0,0099
69	0,0639	0,0480	0,0228	0,0448	0,0270	0,0112
70	0,0691	0,0526	0,0254	0,0488	0,0302	0,0128
71	0,0748	0,0576	0,0283	0,0532	0,0337	0,0146
72	0,0808	0,0630	0,0315	0,0579	0,0377	0,0167
73	0,0873	0,0688	0,0350	0,0630	0,0421	0,0190
74	0,0943	0,0752	0,0389	0,0685	0,0470	0,0216
75	0,1018	0,0821	0,0433	0,0744	0,0524	0,0246
76	0,1098	0,0896	0,0481	0,0809	0,0584	0,0280
77	0,1184	0,0977	0,0534	0,0878	0,0651	0,0318
78	0,1275	0,1064	0,0593	0,0953	0,0724	0,0362
79	0,1372	0,1158	0,0657	0,1033	0,0805	0,0411
80	0,1476	0,1260	0,0728	0,1119	0,0895	0,0466
81	0,1585	0,1369	0,0806	0,1211	0,0993	0,0529
82	0,1702	0,1485	0,0892	0,1310	0,1101	0,0600
83	0,1824	0,1610	0,0986	0,1416	0,1218	0,0679
84	0,1954	0,1743	0,1088	0,1528	0,1347	0,0768
85	0,2091	0,1885	0,1200	0,1648	0,1486	0,0867
86	0,2234	0,2035	0,1321	0,1775	0,1638	0,0978
87	0,2385	0,2194	0,1453	0,1910	0,1801	0,1102
88	0,2542	0,2362	0,1596	0,2053	0,1977	0,1238
89	0,2706	0,2539	0,1749	0,2203	0,2166	0,1390
90	0,2876	0,2724	0,1914	0,2361	0,2367	0,1556
91	0,3052	0,2917	0,2091	0,2527	0,2581	0,1738
92	0,3235	0,3118	0,2279	0,2700	0,2808	0,1937
93	0,3423	0,3326	0,2479	0,2880	0,3045	0,2153
94	0,3616	0,3541	0,2690	0,3068	0,3294	0,2385
95	0,3814	0,3762	0,2913	0,3262	0,3553	0,2634

ANEXO 3 – OUTPUTS E VIEWS PARA OBTENÇÃO DOS VALORES DE $\hat{\mu}$ E \hat{V} (MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS)

- Estimação dos parâmetros μ_1 e μ_2 - Homens:

Estimation Method: Least Squares

Sample: 2 69

Included observations: 68

Total system (balanced) observations 136

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
u(1)	-0.041798	0.016885	-2.475509	0.0146
u(2)	0.000377	0.000261	1.445924	0.1505
Determinant residual covariance		1.11E-08		

- Estimação da matriz de covariâncias, $V = CC^T$ - Homens:

	D(A1MALE)	D(A2MALE)
D(A1MALE)	0.019101	-0.000276
D(A2MALE)	-0.000276	4.56E-06

- Estimação dos parâmetros μ_1 e μ_2 - Mulheres:

Estimation Method: Least Squares

Sample: 2 69

Included observations: 68

Total system (balanced) observations 136

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
u(1)	-0.064350	0.013497	-4.767873	0.0000
u(2)	0.000630	0.000220	2.867427	0.0048
Determinant residual covariance		6.62E-09		

- Estimação da matriz de covariâncias, $V = CC^T$ - Mulheres:

	D(A1FEM)	D(A2FEM)
D(A1FEM)	0.012205	-0.000181
D(A2FEM)	-0.000181	3.24E-06

Para obter estes outputs, são seguidos os seguintes passos:

1. Seleccionar os parâmetros $A_1(t)$ e $A_2(t)$ e escolher a opção “Open as system”. Foi feita a diferenciação (D) dos parâmetros, aquando da criação do sistema.
2. Escolher a opção “Estimate”, sendo o método de estimação “Ordinary Least Squares”
3. Para obtenção da matriz de covariâncias, escolher “View”, “Residuals”, “Covariance Matrix”.

ANEXO 4 – CÓDIGOS MATLAB UTILIZADOS NA MAXIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS $A_1(t)$ E $A_2(t)$ (FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA)

Código 1:

```
function ll=loglikelihood(k, x, ex, dx, ano)
% Log-likelihood function to maximize
% k = parameters (k = [k(1),k(2)])
% x = vector of ages
% ex = vector of exposures for given year
% dx = vector of death counts for given year
% ano = vector of observations (0 to 68)

ll = 0;

nx = 36; %size(etx_males,1);

m = log(1 + exp(k(1)+k(2).*(x+ano))); % pre-calculate outside for-
loop for efficiency

for i=1:nx

    ll = ll + dx(i).*log(ex(i).*m(i)) - ex(i).*m(i);

end

ll = -ll;

end
```

Código 2:

```
ini=0;
options = ['FunValCheck','on'];

x = (60:95); % vector of ages corresponding to the columns of
the deaths/exposure matrices
k0 = [-13,0.09]; % initial guess for parameters
numanos=69;
anos=(0:numanos-1);

nx = 36;%size(etx_males,1);
nt = 2;%size(etx_males,2);

kappam = zeros(numanos,3);
kappaf= zeros(numanos,3);
j=0;

for ano=1:numanos
    clear dtx_*;
    clear etx_*;
    clear kmale kfemal;
```

```
dtx_males(:,1)=males_all(1+ini:36+ini,3);

etx_males(:,1)=males_all(1+ini:36+ini,4);

dtx_females(:,1)=fmales_all(1+ini:36+ini,3);

etx_females(:,1)=fmales_all(1+ini:36+ini,4);
i=1;
%for i=1:nt

    kmale = fminsearch(@(kmale)
loglikelihood(kmale,x,etx_males(:,i),dtx_males(:,i),anos(ano)),k0,options);
    %kappam(ano+i+j-1,1)=ano;
    %kappam(ano+i+j-1,2:3)=kmale;
    kappam(ano,1)=ano;
    kappam(ano,2:3)=kmale;

    kfemale = fminsearch(@(kfemale)
loglikelihood(kfemale,x,etx_females(:,i),dtx_females(:,i),anos(ano)),k0,options);
    %kappaf(ano+i+j-1,1)=ano;
    %kappaf(ano+i+j-1,2:3)=kfemale;
    kappaf(ano,1)=ano;
    kappaf(ano,2:3)=kfemale;

%end
j=j+1;
ini=ini+36;
end
```

ANEXO 5 – ALGUNS DOS VALORES ESTIMADOS PARA OS PARÂMETROS $A_1(t)$ E $A_2(t)$ (FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA)

Valores ajustados para A1 e A2 (Função de Máxima Verosimilhança) - 1941, 1976 e 2009				
Género	Homens		Mulheres	
Parâmetro	A1	A2	A1	A2
1941	-8,6810	0,0863	-9,3805	0,0916
1976	-12,6316	0,0925	-15,0859	0,1107
2009	-18,5448	0,1077	-22,7436	0,1330

ANEXO 6 – ALGUMAS DAS TAXAS DE MORTALIDADE AJUSTADAS PARA IDADES DOS 60 AOS
95 ANOS (FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA)

Taxas de mortalidade ajustadas para A1 e A2 (Função de Máxima Verosimilhança) – 1941, 1976 e 2009						
Género	Homens			Mulheres		
Ano	1941	1976	2009	1941	1976	2009
60	0,0293	0,0209	0,0085	0,0201	0,0102	0,0033
61	0,0319	0,0229	0,0094	0,0220	0,0114	0,0037
62	0,0346	0,0251	0,0105	0,0241	0,0127	0,0042
63	0,0376	0,0274	0,0117	0,0263	0,0142	0,0048
64	0,0409	0,0300	0,0130	0,0288	0,0158	0,0055
65	0,0444	0,0328	0,0144	0,0315	0,0177	0,0063
66	0,0482	0,0359	0,0160	0,0344	0,0197	0,0072
67	0,0523	0,0392	0,0178	0,0376	0,0219	0,0082
68	0,0568	0,0428	0,0198	0,0410	0,0244	0,0094
69	0,0616	0,0468	0,0220	0,0448	0,0272	0,0107
70	0,0668	0,0511	0,0244	0,0489	0,0303	0,0122
71	0,0724	0,0558	0,0271	0,0533	0,0337	0,0139
72	0,0784	0,0609	0,0301	0,0581	0,0375	0,0159
73	0,0848	0,0664	0,0334	0,0633	0,0417	0,0181
74	0,0918	0,0723	0,0371	0,0690	0,0464	0,0206
75	0,0993	0,0788	0,0412	0,0751	0,0515	0,0234
76	0,1072	0,0858	0,0456	0,0817	0,0572	0,0267
77	0,1158	0,0933	0,0505	0,0889	0,0635	0,0304
78	0,1249	0,1014	0,0560	0,0966	0,0704	0,0345
79	0,1347	0,1102	0,0619	0,1049	0,0780	0,0392
80	0,1451	0,1196	0,0685	0,1138	0,0864	0,0446
81	0,1561	0,1297	0,0757	0,1233	0,0955	0,0506
82	0,1678	0,1405	0,0836	0,1336	0,1055	0,0574
83	0,1802	0,1520	0,0922	0,1445	0,1164	0,0650
84	0,1933	0,1643	0,1016	0,1562	0,1283	0,0736
85	0,2072	0,1774	0,1119	0,1687	0,1412	0,0832
86	0,2217	0,1913	0,1230	0,1819	0,1551	0,0939
87	0,2369	0,2060	0,1351	0,1960	0,1702	0,1058
88	0,2529	0,2215	0,1482	0,2108	0,1864	0,1191
89	0,2696	0,2379	0,1623	0,2265	0,2038	0,1338
90	0,2869	0,2551	0,1775	0,2429	0,2223	0,1499
91	0,3049	0,2730	0,1938	0,2601	0,2420	0,1677
92	0,3235	0,2918	0,2111	0,2782	0,2629	0,1871
93	0,3427	0,3112	0,2296	0,2969	0,2849	0,2081
94	0,3624	0,3314	0,2492	0,3164	0,3080	0,2309
95	0,3825	0,3522	0,2699	0,3365	0,3320	0,2553

ANEXO 7 – OUTPUTS E VIEWS PARA OBTENÇÃO DOS VALORES DE $\hat{\mu}$ E \hat{V} (FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA)

- Estimação dos parâmetros μ_1 e μ_2 - Homens:

Estimation Method: Least Squares

Sample: 2 69

Included observations: 68

Total system (balanced) observations 136

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
u(1)	-0.145056	0.020700	-7.007495	0.0000
u(2)	0.000314	0.000228	1.378295	0.1704
Determinant residual covariance		1.43E-08		

- Estimação da matriz de covariâncias, $V = CC^T$ - Homens:

	D(LL_A1_MALES)	D(LL_A2_MALES)
D(LL_A1_MALES)	0.028709	-0.000292
D(LL_A2_MALES)	-0.000292	3.47E-06

- Estimação dos parâmetros μ_1 e μ_2 - Mulheres:

Estimation Method: Least Squares

Sample: 2 69

Included observations: 68

Total system (balanced) observations 136

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
u(1)	-0.196515	0.019400	-10.12984	0.0000
u(2)	0.000608	0.000214	2.846069	0.0051
Determinant residual covariance		1.31E-08		

- Estimação da matriz de covariâncias, $V = CC^T$ - Mulheres:

	D(LL_A1_FEMALES)	D(LL_A2_FEMALES)
D(LL_A1_FEMALES)	0.025215	-0.000253
D(LL_A2_FEMALES)	-0.000253	3.06E-06

Para obter estes outputs, são seguidos os mesmos passos que no Anexo 3.

ANEXO 8 – ALGUNS DOS VALORES MÉDIOS OBTIDOS PARA A EVOLUÇÃO
SIMULADA DAS TAXAS DE MORTALIDADE (MÉTODO DOS MÍNIMOS
QUADRADOS)

Média para a evolução simulada das taxas de mortalidade, de 2011 a 2035 – Homens com 65 anos em 2010 (Método dos Mínimos Quadrados) – 2011, 2020 e 2035		
Género	Homens	Mulheres
2011	0,0162	0,0074
2020	0,0384	0,0211
2035	0,1688	0,1373